

JAN 1 - 1935

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
KARL SCHEEL

92. BAND. 9. UND 10. HEFT

MIT 24 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 7. DEZEMBER 1934)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1934

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 23/24, zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstande der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 75 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum gleichen Preise berechnet werden, den die Arbeit im Heft kostet, da die umfangreiche Versendung von Sonderdrucken den Absatz der Zeitschrift schädigt. Dissertationsexemplare werden von der Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht geliefert.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Manuskriptsendungen sind zu richten an Herrn Geh.-Rat Professor Dr. Karl Scheel, Berlin-Dahlem, Werderstraße 28.

92. Band

Inhalt

9. und 10. Heft

	Seite
D. A. G. Bruggeman , Berechnung der elastischen Moduln für die verschiedenen Texturen der regulären Metalle. (Eingegangen am 25. Oktober 1934) . . .	561
Herbert Tielsch , Die Absorption der Ultrastrahlung in verschiedenen Materialien. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1934)	589
M. W. Karev und S. F. Rodionov , Die Empfindlichkeit von Lichtzählern. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1934)	615
Arne Sandström , Ein Röntgenspektrometer für Hochvakuum mit Konkavkristall nach Joh ann. (Zweite Mitteilung.) Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1934)	622
W. Lenz , Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. (Eingegangen am 17. Oktober 1934)	631
E. Brandt , Geometrisch-optische und wellentheoretische Methode zur Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. (Eingegangen am 17. Oktober 1934)	640
Witold Jacyna (Jacyno) , Die Eigenschaften reeller Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung. III. Die spezifischen Wärmen c_v bzw. c_p und die Spannungs- bzw. Ausdehnungskoeffizienten β bzw. α des Heliums. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Oktober 1934)	661
W. Jacyna, S. Derewjankin, A. Obnorsky und T. Parfentjew , Bestätigung des Jacynaschen Auswahltheorems am Helium. (Eingegangen am 16. Oktober 1934)	675
R. Becker , Bemerkungen zu der Arbeit von G. Schweikert: „Zur Theorie der Zustandsgleichung. I.“ (Eingegangen am 23. September 1934) . . .	680
G. Schweikert , Erwiderungen auf die Bemerkungen von R. Becker zu meiner Arbeit „Zur Theorie der Zustandsgleichung. I.“ (Eingegangen am 11. November 1934)	683
R. Becker , Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung. (Eingegangen am 19. November 1934)	689
G. Schweikert , Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung. (Eingegangen am 22. November 1934)	689
J. A. Prins , Bemerkung zu einer Arbeit von F. Jentzsch und H. Steps: „Die Winkelabhängigkeit des Brechungsindex bei Röntgenstrahlen“. (Eingegangen am 7. November 1934)	690
W. Heisenberg , Berichtigung zu der Arbeit: „Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons“. (Eingegangen am 5. November 1934)	692

Berechnung der elastischen Moduln für die verschiedenen Texturen der regulären Metalle.

Von **D. A. G. Bruggeman** in Wassenaar (Holland).

(Eingegangen am 25. Oktober 1934.)

Es wird die Theorie für die Berechnung der elastischen Moduln für verschiedene Texturen der regulären Metalle aus den Einkristallparametern entwickelt. Sodann wird untersucht, welchen Anteil die Textur bzw. die anderen Eigenschaften der Vielkristalle in den Unterschieden der E - und G -Werte haben. Im allgemeinen zeigt sich der Texturfaktor vorherrschend, Wolfram verhält sich abweichend. In einigen Fällen eignet sich die Theorie zur Entscheidung zwischen verschiedenen Einkristallkonstanten- bzw. Texturbestimmungen.

1. Das Problem. Die gemessenen Werte desselben elastischen Moduls eines und desselben Stoffes liegen oft weit auseinander, auch bei zuverlässigen Messungen desselben Forschers. So erhielt Grüneisen^{25*)} bei zwei Zinkstäben E -Werte 8,23 und 12,85 (in 10^{11} dyn/cm²), Koenigsberger³⁷⁾ bei Wolframdrähten G -Werte von 7,1 bis 20; bei den anderen Metallen sind die Unterschiede meist geringer, aber immerhin noch sehr beträchtlich. Als Ursache dieser Erscheinung sind hauptsächlich vier Faktoren hervorgehoben worden. Voigt⁶⁴⁾ erklärt unerwartet niedrige Modulwerte bei dichten Mineralien und später⁶⁵⁾ bei Metallen durch Poren und Einschlüsse zwischen den Kristalliten des reinen Stoffes. Neben dieser Ursache und der nicht immer von ihr zu trennenden Aufnahme von Fremdatomen ins Gitter, welche ich unter dem Namen Mischungsfaktor zusammenfassen will, hat Voigt schon sehr früh den Texturfaktor erkannt. In einer von seinen ersten Abhandlungen⁶²⁾ hat er die Anisotropie einer elektrolytischen Kupferplatte festgestellt und aus einer Texturannahme sogar die elastischen Konstanten des Kupferkristalls zu berechnen versucht. Als später solche Texturen bei Metallen mittels Röntgenanalyse wirklich bestimmt wurden, haben Schmid und Wassermann⁵⁷⁾, Goens und Schmid²²⁾ und Weerts⁶⁸⁾ den E -Verlauf in Walzblechen durch diesen Faktor qualitativ erklärt.

In derselben Zeit haben u. a. Kuntze⁴⁰⁾ und Sachs⁵³⁾ in Deutschland, Honda und Yamada²⁹⁾ und Kawai³²⁾ ³³⁾ in Japan auf den Einfluß der Eigenspannungen in deformierten Metallen aufmerksam gemacht und gewisse Änderungen der elastischen Moduln durch sie erklärt. Solche Span-

*) Die Hinweise beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Abhandlung.

nungen beruhen auf örtlichen Änderungen des Kristallgitters, die durch gelindes Erhitzen zum größten Teil aufgehoben werden. Von anderer Seite sind auch andere, mehr bleibende Gitteränderungen als Ursache von Änderungen der elastischen Konstanten angenommen worden, so von Czochralski⁹⁾ eine teilweise Zertrümmerung des Kristallgitters und von englischen und amerikanischen Forschern [Bridgman⁵⁾ u. a.] die Bildung amorpher Substanz. Alle diese Erklärungen nehmen eine Änderung des Kristallgitters als Ursache der Elastizitätsänderungen an, ich werde sie unter dem Namen Gitterfaktor zusammenfassen. Für besondere Fälle ist noch eine vierte Erklärung versucht worden: Kawai³³⁾ deutet eine Reihe unerwarteter G -Änderungen als Folgen von Kornverfeinerung und -vergrößerung.

Mehrere Male ist versucht worden, den Einfluß des einen oder anderen dieser vier Faktoren zu berechnen. Voigt⁶³⁾ hat im Jahre 1887 den Satz aufgestellt, daß jede Elastizitätskonstante C_{ik} eines Vielkristalls Mittelwert sei der übereinstimmenden c_{ik} der verschiedenen Kristallite. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Elastizitätsmoduln E und G eines Aggregats bestimmter Textur aus den Einkristallkonstanten berechnen; so kann der Anteil des Texturfaktors bestimmt werden. Die Begründung des Satzes gibt Voigt im II. Anhang seines bekannten Lehrbuches⁶⁶⁾. In meiner Dissertation⁷⁾ habe ich gezeigt, daß diese Begründung auf unrichtigen Grenzbedingungen beruht und die Voigtsche Mittelung eine ziemlich grobe Annäherung darstellt, die bei quasiisotropen Aggregaten von stark anisotropen Einkristallen E - und G -Werte ergibt, die bis 20% zu hoch liegen. Eine ebenso grobe Annäherung von der anderen Seite her erhält Reuss⁴⁹⁾ durch das Mitteln der Voigtschen Parameter s_{ik} . Näher zum Ziel kommen Huber und E. Schmid³⁰⁾ mit der Umkehrung der Methode von Reuss, also durch Mitteln der Werte $1/s_{ik}$. Für Zink und Kupfer, auch für den Torsionsmodul G von Silber erhalten dann Boas und Schmid³⁾ nach dieser Methode beinahe vollständige Übereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Werten, hier beziehen die von ihnen angegebenen beobachteten Werte sich aber nicht auf regellos angeordnetes Material. Dies läßt sich leicht nachprüfen, für Quasiisotropie gilt ja die Beziehung

$$\frac{1}{3} \kappa = \frac{3}{E} - \frac{1}{G}. \quad (1)$$

Wären Zn, Cu und Ag von Huber und Schmid quasiisotrop, so wären die Kompressibilitäten κ bzw. 8,4, 5,85 und $2,8 \cdot 10^{-13}$; für Zink aber ergeben die Messungen von Richards⁵¹⁾ und Bridgman⁵⁾ Werte um 17 und die Berechnung aus den Einkristallkonstanten mindestens 15, während

für Kupfer und Silber Richards, Bridgman und die Einkristallkonstanten in guter Übereinstimmung 7,2 bzw. 10,0 ergeben. Bei Vergleichung mit den beobachteten Werten bei Aggregaten, welche der Isotropiebedingung (1) genügen, wie sie in den klassischen Untersuchungen von Grüneisen²⁵⁾ und Voigt⁶⁵⁾ vorliegen, ergeben sich die berechneten Werte nach Boas und Schmid für alle stark anisotropen Metalle (Cu, Ag, Au, Fe, Zn, Cd, Messing) um 5 bis 12% zu niedrig. Dies legt den Gedanken nahe, eine vierte Annäherungsmethode, gleichwertig mit der vorhergehenden, zu versuchen, nämlich die Mittelung von $1/c_{ik}$ über alle Kristallite; höchstwahrscheinlich werden hier die berechneten Werte ungefähr ebensoviel zu hoch sein. Mittelung dieser Werte mit denen von Huber und Schmid, oder einfacher der berechneten Moduln nach Voigt und Reuss, wird bei Quasiisotropie annähernd die richtigen Werte ergeben. Allen derartigen Annäherungen fehlt jedoch die theoretische Begründung, die möglichen Fehler lassen sich nicht abschätzen, und es bleibt fraglich, ob die Methoden sich auf spezielle Texturen übertragen lassen. Die Rechnung bestätigt diesen Zweifel, so fand ich (wie ich an anderer Stelle nachweisen werde), daß bei der Ringfasertextur von Zink der Dehnungsmodul E je nach der Form der Kristallite auf $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ oder $\frac{6}{6}$ der Strecke zwischen den E -Werten nach Reuss und Voigt liegt. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Texturfaktor bis jetzt nicht exakt berechnet worden ist.

Dasselbe gilt vom Gitterfaktor. Honda²⁹⁾ hat den Satz bewiesen, daß die Eigenspannungen bei Zieh- und Recktexturen den Dehnungsmodul E verkleinern, sofern die Dichte bei der Bearbeitung kleiner wird, und Kawai³³⁾ hat diesen Satz ausgedehnt auf den Torsionsmodul G . Kawais Beweisführung scheint nicht zuverlässig (er setzt E in der Richtung, die mit der Stabachse einen Winkel von 45° einschließt, gleich G in der Stabachse), Kawais Satz wird aber von den Messungen ebenso gut bestätigt wie der Satz Hondas. Beide Sätze ergeben jedoch von den Moduländerungen wohl das richtige Vorzeichen, nicht aber die Größe: auch von dieser Seite her ist die Trennung der verschiedenen Ursachen für die Änderung der Aggregatmoduln nicht gelungen.

Die vorliegende Arbeit bringt den Versuch, diese Trennung für einige genügend untersuchte Aggregatsformen durchzuführen. Ausgangspunkt ist die exakte Berechnung des Texturfaktors. Im 2. Abschnitt gebe ich in kurzer Fassung die Theorie der elastischen Aggregatkonstanten für verschiedene Texturen und Kristallitenformen; ich beschränke mich dabei auf das reguläre System. In den folgenden Abschnitten werden bei allen reinen regulären Metallen, deren Einkristallkonstanten bekannt sind, die

elastischen Moduln für verschiedene Texturen berechnet und mit den gemessenen Werten verglichen.

In den seltensten Fällen sind Textur und Moduln an derselben Materialprobe bestimmt worden; wo weiter neben Modulmessungen eine Texturbestimmung vorliegt, kann diese sich auf Material mit einer anderen Vorgeschichte und daher mit einem anderen Aufbau beziehen. Dies ist die eine mögliche Ursache von Widersprüchen, die andere liegt in der möglichen Ungenauigkeit der Einkristallkonstanten. In mancher Hinsicht hat meine Untersuchung daher noch einen vorläufigen Charakter, immerhin lassen sich einige Ziele jetzt schon erreichen. Ich werde im folgenden versuchen:

1. die Unterschiede zwischen den E - und G -Werten für die verschiedenen Texturen qualitativ, womöglich auch quantitativ zu erklären,
2. die Einkristallkonstanten zu prüfen und, wo verschiedene Angaben dieser Konstanten vorliegen, die wahrscheinlichsten Werte zu ermitteln,
3. die Einflüsse von Mischungs- und Gitterfaktor bei den verschiedenen Texturen aufzufinden.

Bei diesen Untersuchungen gehe ich von den in der Literatur angegebenen Texturen aus. In einzelnen Fällen, wo die Textur noch nicht bestimmt worden ist oder eine angegebene Textur unmöglich für das Material der Modulmessungen gelten kann, werde ich umgekehrt aus den Aggregatmoduln die Textur zu bestimmen suchen. Die Genauigkeit meiner Theorie reicht für diesen Rückschluß aus: die Textur, die ich früher⁷⁾ (a. a. O., S. 98) in dieser Weise für das Zn II Grüneisens²⁵⁾ ermittelt habe, war damals schon, ohne daß ich es wußte, von E. Schmid⁵⁴⁾ bei gegossenem Zink beobachtet worden. Die so ermittelten Texturen habe ich womöglich theoretisch zu begründen versucht; immerhin habe ich sie in den Tabellen mit Fragezeichen versehen. Hoffentlich wird bei dem einen oder anderen dieser Aggregate die Textur noch nachträglich bestimmt werden können.

Im letzten Abschnitt der Untersuchung werden die Ergebnisse kurz zusammengefaßt.

2. *Theorie für die Berechnung der elastischen Moduln bei gegebener Textur.* Die im 1. Abschnitt genannten Annäherungsmethoden verstoßen alle gegen die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen der Kristallite. Huber und Schmid³⁰⁾ lassen die Grenzbedingungen absichtlich außer Betracht, geben überhaupt keine theoretische Begründung ihrer Methode. Voigt⁶⁶⁾ nimmt an, daß die Deformationen stetig durch die Grenzflächen hindurchgehen, die Formeln von Reuss⁴⁹⁾ beruhen auf der Stetigkeit der Spannungen. In der Wirklichkeit gilt aber der Satz, daß die tangentiellen

Deformationskomponenten und die normalen Spannungskomponenten stetig durch die Grenzflächen der Kristallite hindurchgehen.

Aus diesem Satz entwickle ich zuerst die Theorie für ein Lamellenaggregat: die Kristallite haben die Form dünner Lamellen mit parallelen Grenzebenen und die Einzellamellen weisen alle möglichen Orientierungen der gegebenen Textur, regellos verteilt, auf. Im Walzblech ist dieser Aufbau mit großer Annäherung realisiert.

Ich nehme ein raumfestes Achsenkreuz mit der Z -Achse in der Lamellennormale an. An die Stelle des gewöhnlichen Ausdrucks der freien Energie entweder in sechs Spannungs- oder sechs Deformationskomponenten tritt eine quadratische Funktion derjenigen sechs Variablen, die durch die Grenzflächen der Lamellen stetig hindurchgehen und daher bei homogener Deformation im ganzen Aggregat konstant sein mögen: $Z_z, Z_y, Z_x, x_x, y_y, x_y$. Diesen unabhängigen Variablen paßt sich als Potentialfunktion die Funktion φ an, definiert durch:

$$2\varphi = X_x x_x + Y_y y_y + X_y x_y - z_z Z_z - z_y Z_y - z_x Z_x. \quad (2)$$

Der Mittelwert $\bar{\varphi}$ für das ganze Aggregat läßt sich das eine Mal in den Vielkristallkonstanten des Aggregats, das andere Mal in den Einkristallkonstanten der Lamellen ausdrücken. Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergibt Formeln zur Berechnung der Aggregatskonstanten.

Das Walzaggregat hat rhombische Symmetrie mit den W -, Q - und N -Richtungen als Hauptachsen. Wenn S_{ik} die Voigtschen Moduln des Aggregats bezeichnen, hat die Funktion 2φ der Gleichung (2) den Mittelwert:

$$2\bar{\varphi} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} x_x + \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} y_y - 2 \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} x_x y_y + \frac{1}{S_{66}} x_y^2 - S_{44} Z_y^2 - S_{55} Z_x^2 + \dots \quad (3)$$

Ich habe nur die Glieder hingeschrieben, die ich weiter benutzen werde.

Jetzt berechne ich φ für eine Einzellamelle, deren Hauptachsenkreuz $X^0 Y^0 Z^0$ in bezug auf das raumfeste WQN -System durch das Transformationsschema

	W	Q	N	
X^0	a_1	b_1	c_1	
Y^0	a_2	b_2	c_2	
Z^0	a_3	b_3	c_3	

(4)

festgelegt worden ist.

Die s'_{ik} der Einzellamelle in bezug auf das WQN -System lassen sich für reguläre Kristalle in den Hauptmoduln s_{ik} des Einkristalls durch die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} &= s_{11} - 2s \sum a_i^2 a_k^2 \text{ usw.} \\ s'_{44} &= s_{44} + 4s \sum b_i^2 c_i^2 \quad ,, \\ s'_{12} &= s_{12} + s \sum a_i^2 b_i^2 \quad ,, \\ s'_{14} &= 2s \sum a_i^2 b_i c_i \quad ,, \\ s'_{15} &= 2s \sum a_i^3 c_i \quad ,, \\ s'_{16} &= 2s \sum a_i^3 b_i \quad ,, \\ s'_{56} &= 4s \sum a_i^2 b_i c_i \quad ,, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ausdrücken, wo s das Maß der Anisotropie:

$$s = s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \quad (6)$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$2\bar{\varphi} = \bar{\sigma}_{11} x_x^2 + \bar{\sigma}_{22} y_y^2 + 2\bar{\sigma}_{12} x_x y_y + \bar{\sigma}_{66} x_y^2 - \bar{\sigma}_{44} Z_y^2 - \bar{\sigma}_{55} Z_x^2 + \dots \quad (7)$$

Hier sind die $\bar{\sigma}_{ik}$ Mittelwerte über gewisse Determinantenquotienten:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{s'_{22} s'_{66} - s'^2_{26}}{\Sigma}, \\ \sigma_{22} &= \frac{s'_{11} s'_{66} - s'^2_{16}}{\Sigma}, \\ \sigma_{12} &= \frac{s'_{16} s'_{26} - s'_{12} s'_{66}}{\Sigma}, \\ \sigma_{44} &= \frac{\begin{vmatrix} s'_{44} & s'_{41} & s'_{42} & s'_{46} \\ s'_{14} & s'_{11} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{24} & s'_{21} & s'_{22} & s'_{26} \\ s'_{64} & s'_{61} & s'_{62} & s'_{66} \end{vmatrix}}{\Sigma}, \\ \sigma_{55} &= \frac{\begin{vmatrix} s'_{55} & s'_{51} & s'_{52} & s'_{56} \\ s'_{15} & s'_{11} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{25} & s'_{21} & s'_{22} & s'_{26} \\ s'_{65} & s'_{61} & s'_{62} & s'_{66} \end{vmatrix}}{\Sigma} \end{aligned} \quad (8)$$

mit

$$\Sigma = \begin{vmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{26} \\ s'_{61} & s'_{62} & s'_{66} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Gleichsetzung der Koeffizienten von (3) und (7) und Lösung der erhaltenen Gleichungen ergibt für die S_{ik} des Aggregats

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\sigma}, & S_{66} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_{66}}, \\ S_{22} &= \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma}, & S_{44} &= \bar{\sigma}_{44}, \\ S_{12} &= \frac{-\bar{\sigma}_{12}}{\sigma}, & S_{55} &= \bar{\sigma}_{55}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wo

$$\sigma = \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} - (\bar{\sigma}_{12})^2. \quad (11)$$

Die Umkehrungen von S_{44} , S_{55} und S_{66} ergeben die verschiedenen Torsionsmoduln des Aggregats. Um den Dehnungsmodul E_χ in eine Richtung der Walzebene, die mit der W -Richtung den Winkel χ einschließt, zu ermitteln, berechne ich zuerst das betreffende $S_{\chi\chi}$ nach der Regel

$$S_{\chi\chi} = S_{11} \cos^4 \chi + (2S_{12} + S_{66}) \cos^2 \chi \sin^2 \chi + S_{33} \sin^4 \chi \quad (12)$$

und schreibe schließlich:

$$E_\chi = \frac{1}{S_{\chi\chi}}. \quad (13)$$

Bei Walzblechen wird gemittelt über zwei, höchstens drei Vorzugsorientierungen der Kristallite, eine kurze Rechnung führt also zum Ziel.

Etwas verwickelter ist der Verlauf bei den axialen Texturen, wie sie bei gezogenen, gedehnten und elektrolytischen Aggregaten vorkommen: die Kristallite haben mehr oder weniger ausgesprochene Faserform parallel einer Vorzugsrichtung im Aggregat und ihre Achsenorientierungen sind symmetrisch um diese Richtung verteilt. Hier berechne ich zuerst die Moduln für ein Lamellenaggregat parallel der Symmetrieachse, diese wird als X -Achse gewählt, während die Lamellennormale wie vorher Z -Achse ist. Die Lamellen besitzen alle Orientierungen, die bei der wirklichen Textur auftreten, jede Mittelung ist also eine Integration. Aus den S_{ik} des Lamellenaggregats folgen dann die Modulwerte des axialen Faseraggregats in bezug auf die Achsenrichtung nach den Formeln:

$$\frac{1}{E} = S_{11} - S_{12} \frac{S_{12} - S_{13}}{S_{22} - S_{23}}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{G} = \sqrt{S_{44} S_{66}}, \quad (15)$$

die ich an anderer Stelle beweisen werde. Einfache Mittelung der Moduln aller möglichen Lamellenaggregate parallel der Symmetrieachse würde ergeben:

$$\frac{1}{E} = S_{11}, \quad (14a)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} (S_{44} + S_{66}); \quad (15a)$$

bei kleiner Anisotropie des Einkristalls genügen letztere Gleichungen vollständig, bei großer Anisotropie ergeben sie eine gute zweite Annäherung (Abweichungen unter 1%).

Noch etwas verwickelter wird die Rechnung bei Körneraggregaten, d. h. Gebilden aus ungefähr isodiametrischen Kristalliten mit Grenzflächen in allen möglichen Lagen, wie sie bei quasiisotropen und anderen Guß- und Rekristallisationstexturen auftreten. Wiederum benutze ich zuerst die Formeln (10) und (11), diesmal bei einem Lamellenaggregat, wo die Einzellamellen alle möglichen Orientierungen, regellos verteilt und gleich häufig, aufweisen. Früher habe ich⁷⁾ die elastischen Konstanten eines solchen Aggregats u. a. für reguläre Kristalle ausgearbeitet; eine klare Übersicht der erhaltenen Gleichungen findet sich in einer Arbeit von H. Röhl⁵²⁾, Wiederholung wäre überflüssig. So ein Lamellenaggregat ist noch nicht genau isotrop, die spezielle Lage der Grenzebenen macht sich noch bemerklich, indem die Moduln parallel dieser Ebene und senkrecht zu ihr noch Unterschiede bis 4% aufweisen. Um genaue Modulwerte für ein wirklich isotropes Aggregat zu erhalten, habe ich früher das Körneraggregat ersetzt durch ein ziemlich gekünsteltes „sekundäres Lamellenaggregat“. Für dieses habe ich bei Al, Au, Messing, Zn und Cd, später Röhl⁵²⁾ bei Ag und Au die Aggregatsmoduln berechnet und sehr gute Übereinstimmung mit den empirischen Werten erhalten. Später ist es mir gelungen, die Moduln des Körneraggregats zu berechnen aus den elastischen Konstanten des einfachen Lamellenaggregats; die betreffenden Formeln werde ich an anderer Stelle ableiten. Ich habe sie benutzt für die Berechnung der Isotropiemoduln von Cu und Fe, die im folgenden in den Tabellen 1 und 4 aufgenommen sind. Die älteren Rechnungsergebnisse von Röhl und mir selbst brauchen nicht abgeändert zu werden (sie finden sich zum Teil in den Tabellen 2 und 3), denn die verbesserten Werte von E und G für isotropes Al, Ag, Au, Zn und Cd stimmen innerhalb 0,1% mit den früheren überein; auch die einfachen Mittelungen der nach (10) berechneten Werte von S_{11} , S_{22} und S_{33} bzw. S_{44} , S_{55} und S_{66} im Lamellenaggregat ergeben übrigens schon recht gute Annäherungen der betreffenden Werte im isotropen Körneraggregat.

Somit ist für beinahe alle bis jetzt aufgefundenen Texturen der regulären Metalle eine Berechnungsweise der Aggregatsmoduln gegeben, die sich nur im Falle der Isotropie etwas umständlich gestaltet. Die einzige Ausnahme ist die Ringfasertextur gewisser Gußaggregate. Auch hier läßt sich die Rechnung mit einiger Mühe durchführen, die Textur ist aber so wenig vollständig ausgeprägt, und auch die idealisierende Annahme der

regellosen Mischung aller vorkommenden Orientierungen, worauf meine Methode beruht, ist so wenig erfüllt, daß sich hier nicht mehr als qualitative Übereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Werten erwarten läßt. Ich begnüge mich deshalb hier mit einer zweiten Annäherung, indem ich die radiale Faser durch Lamellen senkrecht zur Stabsachse ersetze. Die anderen berechneten Werte der Abschnitte 3 bis 7 beanspruchen bei idealer Textur exakte Gültigkeit für die Walzbleche, Annäherung mit möglichen Fehlern unter 1% für die Faser- und Körneraggregate.

3. Kupfer. Dieses Metall eignet sich besonders für unseren Zweck. Nicht nur liegen viele E - und G -Messungen sowie Texturbestimmungen vor, doch unter diesen sind die Untersuchungen von Weerts⁶⁸⁾ ausgezeichnet durch den Umstand, daß er viele Moduln und die Textur an demselben Walzblech bestimmt hat. Leider ist der Ausgangspunkt der Rechnung etwas unsicher: die vorläufigen Einkristallkonstanten von Goens und Weerts²³⁾ vertragen sich schlecht mit den späteren Messungen Kimuras³⁵⁾. Merkwürdigerweise steckt in der früher zitierten Arbeit von Weerts⁶⁸⁾ noch eine dritte Gruppe von Einkristallkonstanten. Nach der Rekristallisierung seines Kupferwalzblechs fand er nämlich bei der Röntgenuntersuchung einheitliche $[100]$ -Textur über die ganze Blechdicke, und die starke bleibende Dehnung schon bei $3,5 \text{ kg/mm}^2$ Ziehspannung wies auch auf Einkristallcharakter hin. Dasselbe hatten Glöcker und Widmann¹⁹⁾ schon früher gefunden, ihr Röntgenbild von rekristallisiertem Kupfer enthielt lauter scharfe Flecken ohne die Spur einer Streuung; außerdem fand Köster³⁹⁾ Festigkeit und Dehnung bei rekristallisiertem Kupfer wie bei einem Einkristall. Nun hat Weerts bei seinem rekristallisierten Blech die Dehnungsmoduln E in sieben Richtungen gemessen; aus diesen Werten zusammen mit der Bridgmanschen⁵⁾ Kompressibilität habe ich eine dritte Gruppe von Cu-Einkristallkonstanten berechnet, die ich weiter mit CuW bezeichnen werde. Diese Konstanten schließen sich sehr gut den Weertschen Messungen an, was bei den von Weerts selbst angenommenen GW -Konstanten nicht der Fall ist:

Tabelle 1a. Dehnungsmoduln bei rekristallisiertem Cu (in 10^4 kg/mm^2).

Winkel mit W -Richtung	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
E berechnet aus Cu GW .	0,68	0,77	1,07	1,33	1,07	0,77	0,68
E " " Cu W . .	0,68 ₅	0,77	1,02	1,22	1,02	0,77	0,68 ₅
E gemessen	0,70	0,80	1,01	1,23	1,02	0,76	0,67

Von den neuen Konstanten s_{ik} (vgl. Tabelle 1) stimmen s_{11} und s_{12} fast genau überein mit den Werten von Goens und Weerts, s_{44} beinahe

Tabelle 1. Kupfer.

Einkristallkonstanten		G W ²³⁾	W	K ³⁵⁾		
	$10^{13} \cdot s_{11}$	15,0	14,9	12,91		
	$10^{13} \cdot s_{12}$	- 6,3	- 6,25	- 5,23		
	$10^{13} \cdot s_{44}$	13,3	16,1	16,36		
	$10^{13} \cdot s$	14,65	13,1	9,96		
Aggregatkonstanten		berechnet			gemessen	
A. <i>Isotropie</i>	$10^{-11} \cdot E$	12,91	11,62	12,11	12,3 Grüneisen ²⁵⁾	
	$10^{-11} \cdot G$	4,78 ₅	4,26 ₅	4,48	4,55 "	
	θ	333	314	325	309 Debye ¹¹⁾	
					315 Nernst-Lindemann ⁴⁶⁾ 321 Klinkhardt ³⁶⁾ 316-323 Eucken-Werth ¹⁴⁾	
B. <i>Gußtextur</i> ¹⁰⁾ [100] \perp Abkühlungsfläche	$10^{-11} \cdot E$	10,02	9,40	10,21	10,3-11,1 Voigt ⁶⁵⁾	
	$10^{-11} \cdot G$	5,27	4,66	4,86	4,2- 4,95 "	
C. <i>Rekrist.-Textur</i> ⁵⁶⁾ 1000° [112]	$10^{-11} \cdot E$	13,0	12,2	12,6	> 12,45 Kawai ³²⁾	
	$10^{-11} \cdot G$	3,60	3,42	3,81	< 4,18 " ³³⁾	
D. <i>Elektrolytische Wachstumstextur</i> ¹⁸⁾ [110]	$10^{-11} \cdot E$	14,84	12,93	13,12	12,0 Voigt ⁶²⁾	
	$10^{-11} \cdot G_1$	5,43	4,68	4,78 ₅	4,53 "	
	$10^{-11} \cdot G_2$	3,59	3,42	3,80	3,85 "	
E. <i>Walztextur</i> ⁶⁸⁾ $a:b = 1:1$	$10^{-11} \cdot E_0$	16,1	14,1	14,3	13,65 Weerts ⁶⁸⁾	
	a) $N [110]$	$10^{-11} \cdot E_{15}$	14,25	12,7	13,1	12,85 "
	$W [1\bar{1}2]$	$10^{-11} \cdot E_{30}$	11,6	10,6	11,3	11,6 "
	$Q [\bar{1}11]$	$10^{-11} \cdot E_{45}$	10,6	9,8	10,7	10,7 "
	b) $N [112]$	$10^{-11} \cdot E_{60}$	11,6	10,6	11,3	11,4 "
	$W [\bar{1}\bar{1}1]$	$10^{-11} \cdot E_{75}$	14,25	12,7	13,1	12,75 "
	$Q [\bar{1}10]$	$10^{-11} \cdot E_{90}$	16,1	14,1	14,3	13,8 "
F. <i>Ziehtextur</i> ⁵⁶⁾ [111]:[100] = 3:2	$10^{-11} \cdot E$	14,48	12,47	12,90	11,8-12,55-13,4 Kawai ³²⁾	
	$10^{-11} \cdot G$	4,66	4,23 ₅	4,35	10,9-13,25 Müller ⁴⁶⁾ 4,71-4,38-4,46 Kawai ³³⁾ 3,89! Kikuta ³⁴⁾ 4,72! 5,3! Jokibe-Sakai ³¹⁾	
G. <i>Dehnungstextur</i>	$10^{-11} \cdot E$				11,8 -12,5 Kawai ³²⁾	
	$10^{-11} \cdot G$				4,61- 4,36 " ³³⁾	
H. <i>Stauchungstextur</i> ⁷⁰⁾ [110]	$10^{-11} \cdot E$	16,25	13,97	14,00		
	$10^{-11} \cdot G$	3,85	3,42	3,80		

ebensogut mit dem Wert Kimuras. Es ist unmöglich, von vornherein die Wahl zu treffen zwischen den verschiedenen Einkristallkonstanten, ich habe daher alle Rechnungen mit den drei Parametersystemen GW , W und K durchgeführt, um dann durch Vergleichung der berechneten und gemessenen Werten ein Urteil zu bilden über die Genauigkeit der verschiedenen Parametersysteme.

In der Tabelle 1 habe ich die Modulwerte für viele Texturen zusammengestellt; nach dem Vorbild Röhls⁵²⁾ habe ich auch die charakteristischen Temperaturen Θ für die regellos geordneten Aggregate, berechnet nach Debyes¹¹⁾ bekannter Formel mit der Korrektur Borns⁴⁾ für neuere h -, k - und N -Werte, aufgenommen.

Mit einer einzigen Ausnahme sind sämtliche Zahlenwerte der Tabelle berechnet mit den Formeln des 2. Abschnitts aus der Annahme der regellosen Verteilung aller in der gegebenen Textur möglichen Orientierungen. Die Ausnahme betrifft das Walzblech Weerts. Hier sind für die Kristallite der Orientierung a zwei Lagen symmetrisch zur W -Richtung möglich. Nach Tammann und Meyer⁶¹⁾ treten diese zwei Orientierungen in stark-gewalztem Kupfer abwechselnd in Lamellenpaketen senkrecht zur Q -Richtung auf: die (110)-Flächen in der Walzebene spalten sich in schmale, schließlich ultramikroskopisch schmale Streifen parallel der W -Richtung auf. Ein Kristallit der Orientierung a ist also eigentlich selbst ein Lamellenaggregat; ich habe nach der Theorie des 2. Abschnitts zuerst die elastischen Parameter dieser Zwillingskristalle berechnet, dann für diese und die b -Kristalle zusammen die Aggregatsmoduln. Dabei ergab sich, daß die Zwillinge Werte für s_{11} , s_{22} , s_{12} aufweisen exakt gleich den s_{22} , s_{11} , s_{12} -Werten der Kristalle b ; bei Mischung im Verhältnis 1:1 tritt daher tetragonale statt rhombischer Symmetrie auf, und die auffallende Gleichwürdigkeit der W - und Q -Richtungen im gewalzten Kupferblech ist damit zwanglos erklärt.

Vielerlei läßt sich aus der Tabelle 1 ablesen. Erstens werden die verschiedenen Werte der Moduln befriedigend erklärt. Qualitativ stimmt alles: der niedrige E -Wert und das große G des Voigtschen gegossenen Kupfers, der Verlauf der E -Werte im Walzblech, die E -Zunahme und G -Abnahme bei den Zugversuchen von Müller und Kawai, auch der sehr geringe Wert des einen Torsionsmoduls in der historischen Elektrolytplatte Voigts; nur die hohen G -Werte der gezogenen Drähte von Jokibe und Sakai bleiben vorläufig rätselhaft.

Quantitativ stimmen die empirischen *Isotropiedaten* bis auf 2% zu den Einkristallkonstanten Kimuras, ebensogut oder noch besser zu ver-

schiedenen Zwischenwerten zwischen den GW - und W -Konstanten. Ebenso schön ist die Übereinstimmung bei dem einzigen Aggregat mit wirklich gemessener Textur, dem *Walzkupfer* Weerts. Wählt man als Konstanten (CuZ) -Werte auf $\frac{1}{4}$ der Strecken zwischen den übereinstimmenden W - und GW -Konstanten, und bringt man die Streuung in Rechnung, indem man die große Mehrheit von Kristalliten, die mehr oder weniger von den Vorzugsorientierungen abweichen, ersetzt durch einen Bruchteil Kristallite in regelloser Anordnung, so kommen die Moduln des Weertschen Walzblechs sehr schön heraus. Dasselbe gilt von den Konstanten Kimuras, wie Tabelle 1b zeigt.

Tabelle 1b. Walzblechmoduln ($\cdot 10^{-11}$).

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Ber. $\frac{2}{3} Z + \frac{1}{3} Is$	13,8	12,9	11,2	10,6	11,2	12,9	13,8
Gemessen	13,65	12,85	11,6	10,7	11,4	12,75	13,8
Ber. $\frac{5}{6} K + \frac{1}{6} Is$	13,95	12,95	11,4	10,95	11,4	12,95	13,95

Bei der Walztextur ist also quantitative Übereinstimmung nicht ausgeschlossen.

Dasselbe gilt von der *Zieh*textur: die Modulwerte Müllers vertragen sich vorzüglich mit der Umorientierung einer ursprünglichen modifizierten Gußtextur (Müller ging aus von Walzdraht von 16 mm) in die ideale Ziehtextur. Unerklärt bleiben die hohen Werte von Jokibe und Sakai, besonders der Extremwert von 5,3 bei einem hartgezogenen Draht aus Handelskupfer. Diese enorme Erhöhung des Torsionsmoduls ist um so merkwürdiger, da in demselben Jahre in demselben Laboratorium Hondas Kikuta bei einem anderen hartgezogenen Kupferdraht den niedrigen Extremwert 3,89 fand. Beide Untersuchungen zielten auf die Änderung von G mit der Temperatur hin, der Absolutwert des Moduls war für beide Nebensache und ein Fehler von wenigen Prozenten bei der Dickenmessung (bei dünnen Drähten sowieso eine heikle Sache) würde, dank der vierten Potenz, die Abweichungen erklären. Vielleicht beruhen beide Abweichungen also auf Messungsfehlern. Ist dies nicht der Fall, so lassen sie vermuten, daß das Verhältnis 3:2 der Vorzugsorientierungen in Kupferdraht sich in beiden Richtungen ändern kann. Für reine [111]- bzw. [100]-Textur ist der G -Wert nach den Konstanten Kimuras 3,56 bzw. 16,36; eine ziemlich kleine Erhöhung des [100]- oder [111]-Anteils würde die Abweichungen auch erklären.

Die Übereinstimmung bei der *Guß*textur ist so gut, wie man bei der bestenfalls unvollständigen Textur der Gußstücke erwarten darf, die Ab-

weichungen sind mäßig und lassen sich durch ungeordnete Kristallite und Poren erklären. Größer sind die Abweichungen, besonders von E , beim *Elektrolytkupfer* Voigts. Die Messung ist 50 Jahre alt, ich habe aber zu viele Messungen von W. Voigt auf den verschiedensten Gebieten bestätigt gesehen, um an grobe Ungenauigkeiten der Messung zu denken. Vielleicht ist die Erklärung folgende: Bekanntlich sind elektrolytische Niederschläge oft porös und nach der geläufigen Auffassung des Wachstumsvorgangs möchten diese Poren hauptsächlich Hohlkanäle senkrecht zur Kathode sein. Eine solche Porosität wird E und G_2 (das C_{66} der Platte mit Z in der Normale) stärker verkleinern als G_1 (das C_{44} der Platte); außerdem wird Streuung um die Ideallage E weiter erniedrigen, G_2 erhöhen, G_1 ziemlich ungeändert lassen. Dies ergibt zusammen eine starke Verkleinerung des berechneten E , eine geringere von G_1 und einen vielleicht ungeänderten G_2 -Wert, in bester Übereinstimmung mit den Voigtschen Messungen von 1883.

Die übrigen Daten der Tabelle 1 beziehen sich alle auf die Messungen Kawais. In den Jahren 1930 und 1931 erhielt Kawai^{32) 33)} sehr merkwürdige Ergebnisse beim Ziehen und Recken von dicken Kupferdrähten. Er maß E und G bei verschiedenen Ziehgraden, sodann den Verlauf ihrer Werte nach Glühen der Drähte bei verschiedenen Temperaturen bis 700 bzw. 900°. Die verschiedenen Kurven zeigen einen deutlichen Knick bei 300°, hier fängt die Rekristallisation an und man darf annehmen, daß die inneren Spannungen hier ausgeglichen sind. Zuerst ergibt sich, daß sowohl E wie G durch diese Spannungen herabgesetzt waren, am meisten bei den niederen Ziehgraden, was sich vielleicht durch die Aufhebung mancher Spannungen während der Umorientierung bei schärferem Ziehen erklären läßt. Der Gitterfaktor tritt also deutlich hervor und wirkt nach der vorhergenannten Regel von Honda-Kawai.

Die Modulwerte nach Ausglühen auf 300° gehören zur spannungslosen Ziehtextur. Sie stimmen gut zu einer stufenweisen Annäherung an die Schmid-Wassermann-Textur (60% [111], 40% [100]). Auffallend ist dabei, daß E erst schnell und dann langsam ansteigt, während G zuerst schnell sinkt und dann langsam zunimmt; dies scheint anzudeuten, daß beim fortschreitenden Ziehen zuerst ein Übermaß von Kristalliten in die [111]-Lage einlenkt und bei höheren Ziehgraden mit weiter zunehmender [111]-Orientierung auch mehrere Kristallite in die zweite Lage einlenken. Beim Walzen von Kupferplatten fanden Tammann und Meyer⁶¹⁾ eine analoge Erscheinung, hier trat zuerst vorherrschend die Orientierung b der Tabelle 1 auf, mit [111] in der Walzrichtung.

Die Rekristallisation, die bei 300° anfang, brachte eine scharfe *E*-Abnahme und *G*-Zunahme bis etwa 600°. Hier (bei einer der fünf Proben schon bei 400°) lag ein zweiter Umkehrpunkt, *E* begann wieder zu wachsen und *G* abzunehmen. Leider hat Kawai den *E*-Verlauf nur bis 700° verfolgt, bei *G* geht er bis 900° und sieht hier einen starken Rückgang, besonders bei der Probe vom höchsten Ziehgrad.

Den ersten Teil dieser merkwürdigen Änderungen (bis 600°) erklärt Kawai wohl mit Recht durch Umorientierung der Kristallite. Bei dem zweiten Teil stellt er eine ansehnliche Kornvergrößerung fest und macht diese verantwortlich für die Abnahme von Brinellhärte und Torsionsmodul. Für erstere Festigkeitseigenschaft mag dies zutreffen, es ist aber nicht leicht einzusehen, wie Kornvergrößerung für sich den rein elastischen Torsionsmodul (und nicht den Youngschen Modul) erniedrigen kann: das *G* der isotropen Vielkristalle läßt sich doch auch berechnen aus den Konstanten des Einkristalls und zeigt nirgends eine solche Extraänderung. Der Versuch liegt nahe, die drei wahrgenommenen Erscheinungen: Kornvergrößerung (von 0,1 μ bei 500° auf 25 μ bei 900°), schwache *E*-Zunahme (von 12,4 hinauf) und starke *G*-Abnahme (von 4,85 auf 4,22) zu erklären durch eine einzige Ursache: neue Rekristallisierung. Und in der Tat fanden Schmid und Wassermann⁵⁵⁾ bei 1000° eine ganz neue Textur: der Draht hat keine elastische Nachwirkung, verhält sich wie ein Einkristall mit [112] in der Drahtachse. Die Rechnung ergibt für diesen Kristall *E* und *G* (nach Kimuras Konstanten) gleich 12,6 bzw. 3,8 — die merkwürdigen *E*- und *G*-Änderungen von 600° an lassen sich also vollständig erklären durch eine Annäherung an diese Endlage, die bei 1000° erreicht sein würde. Bei dieser Erklärung ist Kawais Hilfhypothese überflüssig; es wäre interessant, wenn eine nachträgliche Ergänzung der schönen Versuchsreihe Kawais mit Röntgenanalyse und höheren Glühtemperaturen die hier gegebene Erklärung bestätigen würde.

Kawai hat auch Reihen von *E*- und *G*-Messungen bei *gedehntem Kupfer* (stretched copper) ausgeführt. Der Verlauf der Modulwerte wird durch die Eigenspannungen einigermaßen verhüllt; nimmt man diese durch Glühung auf 300° weg, so bleibt eine gleichmäßige *E*-Zunahme und *G*-Abnahme bei zunehmender Reckung. Die Erscheinungen lassen sich deuten als eine Annäherung an die Ziehtextur — dabei ist von einem schnelleren Einlenken in die [111]-Lage nichts zu verspüren, was sich erwarten ließ, wenn meine Erklärung der [111]-Voreilung beim Ziehen richtig ist: beim Dehnen fehlt ja die Walzwirkung der Ziehdüse. Ob das gedehnte Kupfer auch die [112]-Rekristallisierung bei 1000° aufweist, geht aus der Unter-

suchung Kawais nicht hervor, er hat den Dehnungsmodul nur bis 700° Glühtemperatur und den Torsionsmodul überhaupt nicht nach stärkerem Glühen gemessen.

Somit sind bei Kupfer die Moduln bei allen bis jetzt bekannten Texturen untersucht. Der Mischungsfaktor trat ans Licht als eine vermutliche Porosität des Voigtschen Elektrolytkupfers, der Gitterfaktor mit voller Gewißheit in den Eigenspannungen besonders der Anfangszieh- und Reckgrade Kawais; diese Spannungen erniedrigten beide Moduln und ließen sich durch Glühen auf 300° beseitigen. Übrigens werden alle Moduländerungen restlos erklärt durch den Texturfaktor.

Vollständigkeitshalber habe ich noch für die Stauchungstextur Wevers⁷⁰⁾ E und G berechnet; das eventuelle Auffinden von hohen E - und niederen G -Werten wäre eine Bestätigung der einigermaßen auffallenden [110]-Textur.

Zum Schluß einige Worte über die Einkristallkonstanten. Aus der Tabelle 1 geht deutlich hervor, daß weder die GW - noch die W -Konstanten gute Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Moduln liefern. Wohl ist dies der Fall sowohl mit verschiedenen Zwischenwerten (man nehme z. B. die Mittelwerte M oder die früher definierten Werte Z zwischen GW - und W -Konstanten) als mit den Konstanten Kimuras. Die Ungenauigkeit der Modulmessungen, der Texturbestimmungen und schließlich auch meiner Rechnungen (die gleichmäßige Mischung aller in der Textur vorhandenen Lagen von Kristalliten ist wohl nirgends verwirklicht) erlaubt nicht, zwischen den möglichen Konstantenwerten die Wahl zu treffen. In der Tabelle 1c habe ich die in Betracht kommenden Parametersysteme zusammengestellt mit den s_{ik} von Silber und Gold:

Tabelle 1c. Einkristallkonstanten der Cu-Metalle.

	Cu $G W$	Cu $M - Z$	Cu W	Cu K	Ag R	Au G	Au R
$10^{13} \cdot s_{11}$	15,0	15,0	14,9	12,91	23,2	22,7	24,5
$10^{13} \cdot s_{12}$	— 6,3	— 6,3	— 6,25	— 5,23	— 9,93	— 10,35	— 11,3
$10^{13} \cdot s_{44}$	13,3	$15,05 \pm 0,35$	16,1	16,36	22,9	22,9	25
$\cdot \frac{s_{12}}{s_{11}}$	— 0,42	— 0,42	— 0,42	— 0,40 ₅	— 0,43	— 0,46	— 0,46
$\cdot \frac{s_{44}}{s_{11}}$	0,89	$1,00 \pm 0,02$	1,08	1,27	0,99	1,01	1,02

Die Zwischenwerte M bis Z teilen mit den Konstantensystemen von Silber und Gold die Eigenschaft, daß s_{11} und s_{44} annähernd gleich sind. Ob diese Gleichheit irgendeinen tieferen Sinn hat, weiß ich nicht, jedenfalls

bilden diese Kupfereinkristallkonstanten mit denen von Silber und Gold eine regelmäßige Folge, wie so manche andere Parameter der Cu-Metalle. Die verworfenen GW - und W -Konstanten weisen dieses Regelmäß nicht auf, ebensowenig die sonst tadellosen Konstanten Kimuras — aus diesem Grunde möchte ich vorläufig die Parametergruppe $M-Z$ bevorzugen. Hoffentlich werden die Herren Goens und Weerts bald ihre definitiven s_{ik} -Werte veröffentlichen: sollten diese in der Nähe der $M-Z$ -Werte liegen, so würde meine Theorie damit ihren heuristischen Wert bewiesen haben.

4. *Aluminium*. In großen Zügen benimmt sich Al wie Cu. Kawai³²⁾ ³³⁾ fand beim Ziehen E - und G -Erniedrigungen von etwa 2%, die bei Ausglühen auf 200° verschwanden: der Gitterfaktor wirkt also wie beim Kupfer, nur schwächer. Das ließ sich erwarten, denn wegen der kleinen Anisotropie des Al-Einkristalls sind bei der Kaltbearbeitung die Deformationsunterschiede und daher die inneren Spannungen viel geringer.

Weiter werden alle Moduländerungen durch die Textur erklärt, wenigstens qualitativ. Am besten ist die Ziehtextur untersucht worden. Diese ist nach Polanyi⁴⁷⁾ $[111] + [100]$, beide Vorzugsorientierungen treten mit stark erhöhter Häufigkeit auf, wobei die erstgenannten die zahlreicheren sind. Mark und Weissenberg⁴⁴⁾ fanden gleichfalls beide Lagen. Nach E. Schmid und Wassermann⁵⁶⁾ ist der $[100]$ -Gehalt verschwindend klein, nach Wever und W. Schmid⁷¹⁾ deutlich wahrnehmbar. v. Göler und Sachs²⁴⁾ fanden bei sehr reinem Al-Draht das stärkere Hervortreten der $[100]$ -Lage, die in ihrem anderen Draht höchstens andeutungsweise vorhanden war. Die Ziehtextur sieht also der des Kupfers ähnlich, das Mischungsverhältnis der beiden Vorzugsorientierungen ist verschoben in die Richtung eines größeren $[111]$ -Gehalts, aber im allgemeinen nicht bis 100% $[111]$, wie es im Landolt-Börnstein angegeben wird.

Daneben fanden sowohl v. Göler und Sachs wie Schmid und Wassermann⁵⁵⁾ bei nicht chemisch reinem Al nach Glühen auf 500° regellose Anordnung.

Soviel über die Textur, jetzt die Modulmessungen. Kawai³²⁾ ³³⁾ untersuchte Handelsaluminium, das wohl nicht chemisch rein war. Dennoch scheinen alle vorhergenannten Änderungen aufzutreten, seine Kurven zeigen Knicke (wenn auch wenig scharf) bei 200 und 400°, und die Änderungen der Moduln stimmen vorzüglich zu der Annahme der Wever-Schmid-Textur beim Ziehen, einer weiteren Erhöhung des $[100]$ -Gehalts beim Rekristallisieren und regelloser Verteilung bei 500° (vgl. Tabelle 2).

Tabelle 2. Aluminium.

Einkristallkonstanten		$G \text{ I }^{20)}$	$G \text{ II }^{21)}$	
	$10^{13} \cdot s_{11}$	15,7	15,90	
	$10^{13} \cdot s_{12}$	-5,6	-5,80	
	$10^{13} \cdot s_{44}$	35,7	35,16	
	$10^{13} \cdot s$	3,45	4,12	
Aggregatkonstanten		berechnet		gemessen
A. <i>Isotropie</i>	$10^{-11} \cdot E$	7,00 ₅	7,04	7,18 Grüneisen ²⁵⁾
	$10^{-11} \cdot G$	2,61	2,61	2,69 " ²⁵⁾
	θ	404	394	369 Debye ¹¹⁾
	$\frac{E}{G}$	2,68	2,70	398 Nernst-Lindemann ⁴⁶⁾ 2,67 Grüneisen ²⁵⁾
B. <i>Gußtextur</i> [100] \perp Abkühlungs- fläche ¹⁰⁾	$\frac{E}{G}$		2,50	2,46—2,57 Voigt ⁶⁵⁾ Mittelwert 2,52 ₅
C. <i>Rekrist.-Textur</i> (375°)	$\frac{E - E_{is}}{E_{is}}$		-0,2%	-0,15% Kawai ³²⁾
	$\frac{G - G_{is}}{G_{is}}$		+0,8%	+1% Kawai ³³⁾
D. <i>Ziehtextur</i> ⁷¹⁾	$\frac{E - E_{is}}{E_{is}}$		+3%	+2% Kawai ³²⁾
	$\frac{G - G_{is}}{G_{is}}$		-2%	-2% Kawai ³³⁾

Die exakte [111]-Textur fordert eine größere E -Zunahme und G -Abnahme, um δ bzw. 5,4%. Als Beispiel der E -Erhöhung durch Kaltziehen wird oft die Messung Angensteiners¹⁾ angeführt. In der Tat fand dieser beim Kaltziehen eines weichen Al-Drahtes eine E -Zunahme von 5,3%; G aber zeigte nicht die korrespondierende Abnahme, sondern eine Zunahme von gar 7,4%. Dieses verblüffende Ergebnis erklärt sich, wenn man die beigegebenen Dichten betrachtet: das weiche Al war offenbar sehr porös ($\rho = 2,6974$), ρ nahm beim Drahtziehen nicht ab, wie gewöhnlich, sondern wurde 1% größer (2,7241). Bei der Bearbeitung sind offenbar die Kristallorientierungen ungefähr dieselben geblieben, die Poren aber verschwunden, somit haben sich die Moduln ziemlich gleichmäßig erhöht.

Neben Poren haben auch Unreinheiten einen großen Einfluß: Voigt⁶⁵⁾ fand bei verschiedenen Proben in derselben Richtung aus demselben dichten,

aber unreinen und inhomogenen Al-Gußstück E -Werte 6,06 bis 6,80, G -Werte 2,36 bis 2,64. Dies fällt um so mehr ins Gewicht wegen der geringen Anisotropie des Aluminiums — der Texturfaktor wird leicht verdeckt durch den Mischungsfaktor. Will man ersteren aufzeigen, so sollen nicht die Absolutwerte der Moduln, sondern ihre Verhältniszahlen verglichen werden. Diese Vergleichung findet sich in der Tabelle 2.

Die Übereinstimmung ist so gut, wie man in der gegebenen Lage erwarten kann. Die definitiven Einkristallkonstanten von Goens stimmen ein wenig besser mit den Modulwerten von Grüneisen als die vorläufigen G I. Die drei im 1. Abschnitt genannten Faktoren lassen sich alle erkennen; die G -Abnahme bei 500°, welche Kawai durch die Kornvergrößerung erklärte, läßt sich wiederum deuten durch den Texturfaktor (Übergang zur Isotropie).

5. *Silber und Gold.* Die Ergebnisse der Rechnungen von Röhl⁵²⁾ und von mir⁷⁾ für isotropes Material sind zusammengestellt in der Tabelle 3, wo ich wegen 1c die Einkristallkonstanten fortgelassen habe:

Tabelle 3. Silber und Gold.

Aggregatkonstanten		Silber		Gold		
		ber. R. 52)	gem.	ber. G. 20)	ber. R. 52)	gem.
<i>Isotropie</i>	$10^{-11} \cdot E$	7,93	7,91 ²⁵⁾	7,66 ₅	8,20	7,92 ²⁵⁾
	$10^{-11} \cdot G$	2,90	2,88 ²⁵⁾	2,68	2,89	2,77 ²⁹⁾
	θ	216	215 ⁴³⁾	151,5	161	170 ⁴³⁾
			210 ¹³⁾			162 ²⁶⁾

Bei Silber ist die Übereinstimmung ausgezeichnet: eine schöne Bestätigung der Einkristallkonstanten Röhl's.

Die vollständige Deutung der Moduln für besondere Texturen scheint vorderhand nicht möglich. Die Gußstücke Voigts⁶⁵⁾ geben ein mittleres Verhältnis $E/G = 2,63$, während der Isotropiewert 2,73 beträgt, dies weist auf eine Gußtextur ähnlich der bei Kupfer und Aluminium hin; so viel ich weiß, ist die Gußtextur von Silber noch nicht untersucht worden.

Für die Ziehtextur besteht nach der Bestimmung von Schmid und Wassermann⁵⁶⁾ das Verhältnis $[111]:[100] = 1:3$. Ein solcher Draht würde einen E -Wert 5,97 aufweisen, tief unter dem Isotropiewert. Der Silberdraht von Schmid und Wassermann hat höchstwahrscheinlich eine spezielle Anfangstextur gehabt und einen großen Rest davon beibehalten; für die Vergleichung der gemessenen Modulwerte bei anderen Silberdrähten fehlen also Anhaltspunkte. Die niedrigen G -Werte von Jokibe-Sakai³¹⁾ und Kikuta³⁴⁾ deuten auf einen viel größeren $[111]$ -

Gehalt ihrer gezogenen Drähte, wie auch die alten E -Messungen von Wertheim⁶⁷⁾. Analyse dieser Angaben soll aufgeschoben werden, bis weitere Texturbestimmungen stattgefunden haben.

Ähnlich liegt die Sache bei Gold. Hier liegen zwei Messungen der Einkristallkonstanten vor, von Goens²⁰⁾ und Röhl⁵²⁾. Die vorläufigen s_{ik} -Werte von Goens haben einen möglichen Fehler von 5%, die Röhl-Werte weichen etwa 8% ab; nach den Moduln beim vermutlich isotropen Au II Grüneisens²⁵⁾ mögen die genauen Werte der Einkristallkonstanten ungefähr in der Mitte zwischen den Goens- und Röhl-Werten liegen. Hoffentlich veröffentlicht auch für Gold Herr Goens bald definitive Einkristallkonstanten.

Das gegossene Gold Voigts hat wie das Silber ein erniedrigtes Verhältnis E/G , wiederum läßt sich eine Textur wie bei Kupfer vermuten, wenn auch schwächer ausgeprägt.

Auch bei den gezogenen Drähten ist die Lage wie beim Silber. Nach Schmid und Wassermann⁵⁶⁾ ist die Ziehtextur $[111] + [100]$, beide gleich stark vertreten. Sollte diese Gleichheit exakt gelten, so würde beim Drahtziehen aus isotropem Material der Dehnungsmodul sich erniedrigen und der Torsionsmodul sich erhöhen; bei einem kleinen Überschuß von $[111]$ werden beide Moduln erhöht, bei noch größerem $[111]$ -Übermaß sinkt schließlich der Torsionsmodul. Bei Golddraht von Jokibe und Sakai³¹⁾ war G (reduziert auf 20°) gleich 2,58, Kikuta³⁴⁾ fand 2,73. Soweit die Genauigkeit dieser Zahlen reicht, deuten sie auf eine Drahttextur mit über 60% $[111]$ hin. Hiermit stimmen auch die Messungen von Portevin und Chevenard⁴⁸⁾. Diese nahmen wahr, daß der Torsionsmodul bei kaltgezogenem Golddraht nach Glühen (recuit) auf Temperaturen bis 150° ein wenig anstieg (bei 150° 3%), um dann bei 200° Glühtemperatur weitere 6% und bei 225° noch einmal 7% anzusteigen; bei höheren Glühtemperaturen bis 430° ging G wieder einige Prozente zurück. Der erste Anstieg beruht ohne Zweifel auf dem Verschwinden der inneren Spannungen, die große Zunahme auf Rekristallisation, die bei 225° vollendet ist, während bei höherer Temperatur eine neue Orientierung aufzutreten scheint. Wo Portevin und Chevenard nur Verhältniszahlen geben und von Gold soviel ich weiß noch keine Rekristallisationstextur bekannt ist, ist Nachrechnen dieser Versuchsergebnisse unmöglich.

Untersuchungen bei Silber und Gold im Sinne der Messungen von Kawai und Weerts, unterstützt durch Röntgenanalyse des Materials in allen Stadien, wo auch die Moduln gemessen werden, versprechen wertvolle Daten. Im besonderen wäre es erwünscht, für ursprünglich isotropes

und anisotropes Material die Änderung der Textur beim Drahtziehen und Walzen zu verfolgen, es wird sich dabei wahrscheinlich zeigen, daß die Schmid-Wassermannschen Verhältniszahlen keine allgemeine Gültigkeit haben, doch sich auf Material bestimmter Herkunft beziehen. Durch genaue Modulmessungen desselben Materials in verschiedenen Zuständen könnte sodann der Einfluß des Gitterfaktors sauber abgetrennt werden, der z. B. beim Kupferblech Weerts nicht zutage getreten ist. Nach meiner Meinung hat dieser Faktor auch hier besonders für stark deformiertes Material nur untergeordnete Bedeutung und ist der Texturfaktor die Hauptursache der Moduländerungen.

6. *Eisen.* Eisen führt die Untersuchungen ins Gebiet der körperzentrierten Metalle, die bisher bestehende Analogie der Texturen hört jetzt auf.

Die Einkristallkonstanten sind von Goens und Schmid²²⁾ gemessen worden; von genau isotropen Aggregaten liegen keine Messungen vor. Annähernd isotrop waren nach dem Kriterium (1) das Eisen Fe I von Grüneisen²⁵⁾ und ein fast reines Eisen Hondas²⁷⁾, sie weichen in derselben Richtung von der Isotropie ab, die exakten Isotropiewerte liegen den Grüneisenschen ganz nahe. In der Tabelle 4 finden sich die berechneten und gemessenen Isotropiewerte, sie bestätigen die Einkristallkonstanten von Goens und Schmid. Weiter habe ich die *E*-Messungen derselben Forscher²²⁾ am gewalzten Elektrolyteisen aufgenommen zusammen mit den berechneten Werten für zwei verschiedene Texturen.

Letztere Zahlen bringen eine Berichtigung. Früher hatte ich⁸⁾ die Rechnung durchgeführt mit der Textur von Kurdjumow und Sachs⁴¹⁾, die auch von Goens und Schmid ihrer Rechnung zugrunde gelegt ist:

$$\text{a) } N [100], \quad W [011],$$

$$\text{b) } N [112], \quad W [1\bar{1}0],$$

$$\text{c) } N [111], \quad W [11\bar{2}],$$

und eine ziemlich gute Übereinstimmung erhalten. Dabei hatte ich aber der dritten Vorzugslage einen ziemlich großen Einfluß zuerkannt, nach brieflicher Mitteilung von Herrn Goens war der Anteil dieser Lage aber annähernd Null. Außerdem hatte ich die Kristallite isodiametrisch angenommen, während sie im Walzblech gewiß Lamellenform haben, und den Einfluß der in Wirklichkeit beinahe fehlenden Grenzflächen senkrecht zur *W*-Richtung durch einen Rechenfehler noch vergrößert. Die Rechnung mit dem richtigen Verhältnis $a:b:c = 1:1:0$ und der richtigen Kristallitenform gibt wohl Annäherung an die empirischen Werte, es bleiben

aber große Unterschiede. Die Streuung kann diese nicht erklären, der Mischungsfaktor kann keinen merklichen Einfluß haben, Wegnahme eventueller Eigenspannungen würde nach dem Satz Hondas die kleine Abweichung in der W -Richtung zwar verringern, die weit größere in der Q -Richtung aber nicht merklich ändern, außerdem unmöglich die enorme Abweichung (über 20%) in der Richtung 45° erklären können. Ich habe die Rechnung noch einmal angesetzt mit einem größeren Anteil der Lage c), aber die Verbesserung war gering: bei Aggregaten mit größerem a -Gehalt ist überhaupt kein genügend großer E -Wert in der 45° -Richtung zu erzielen.

Es scheinen nur zwei Wege offen: entweder sind die Einkristallkonstanten sehr ungenau oder das Elektrolyteisen von Goens und Schmid hatte eine wesentlich andere Textur als das Elektrolyteisen von Kurdjumow und Sachs. Ersterer Annahme wird, wie schon bemerkt, von der Prüfung bei isotropem Eisen widersprochen. Viel wahrscheinlicher scheint die zweite Annahme. Erstens weicht die Textur von Kurdjumow und Sachs schon stark von den älteren Texturbestimmungen ab. Ettisch, Polanyi und Weissenberg¹², Wever⁶⁹) und Körber³⁸) fanden alle nur die Hexaederlage a ; noch in 1927 nennt Glocker¹⁷) (100) als einzige Walztextur. Tammann und Heinzel⁶⁰) fanden aber diese Hexaederlage zwar vorherrschend bei Walzgraden bis 50%, bei höheren Walzgraden aber spalten sich die Hexaederflächen in Lamellen mit Flächen der Oktaedergruppe, wozu neben (111) auch (112) gehört, auf; die neuen (111)-Flächen haben meist eine Oktaederhöhe, d. h. $[112]$ in der Querrichtung und also $[110]$ in der Walzrichtung. Bei großen Walzstichen sind schon bei 80% Walzgrad die (100)-Flächen fast verschwunden.

Nach diesem Ergebnis sollte es eigentlich wundern, daß Kurdjumow und Sachs noch so viel Hexaederflächen vorfanden. Die Erklärung scheint mir folgende: In den Deformationstexturen wirkt die Ausgangstextur lange nach; Tammann und Heinzel gingen aus von isotropen Flußeisenblöckchen, Kurdjumow und Sachs von Elektrolyteisen. Nach den Untersuchungen von Glocker und Kaupp¹⁸) hängt die Textur von Elektrolyteisen von der Zusammensetzung und Temperatur des Bades, von der Stromstärke, sogar von dem Kathodenmetall ab. Neben isotropen Blechen erhielten sie eins mit schwacher (100) + (110)-Textur; mehrere andere, darunter auch technisch übliche Methoden ergaben entweder starke (111)- oder mittelmäßige (112)-Textur. In dieser Sachlage scheint es erlaubt, für das Elektrolytblech von Goens und Schmid versuchsweise eine Textur (112) + (111) anzunehmen. Ich habe mehrere Verhältniszahlen versucht, sehr schöne Übereinstimmung (mit Abweichungen von

derselben Größenordnung wie die Unterschiede zwischen den verschiedenen gemessenen Werten für dieselbe Richtung) ergab die Textur (112):(111) = 3:1, wie Tabelle 4 zeigt. Dabei macht es keinen Unterschied, ob die Höhe der Oktaederfläche in der *W*-Richtung liegt, wie Kurdjumow und Sachs fanden, oder senkrecht dazu, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Tammann und Heinzel.

Tabelle 4. Eisen.

Einkristallkonstanten		G. u. S. 22)			
	$10^{13} \cdot s_{11}$	7,57			
	$10^{13} \cdot s_{12}$	— 2,82			
	$10^{13} \cdot s_{44}$	8,62			
	$10^{13} \cdot s$	6,08			
Aggregatkonstanten		berechnet		gemessen	
A. <i>Isotropie</i>	$10^{-11} \cdot E$	21,21		> 21,25	Grüneisen ²⁵⁾
				> 20,87	Honda ²⁷⁾
	$10^{-11} \cdot G$	8,21		< 8,30	Grüneisen ²⁵⁾
				< 8,34	Honda ²⁷⁾
	θ	461,5		392—434	Eucken u. Werth ¹⁴⁾
		$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ ⁴¹⁾	$\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c$?	G. u. S. 22)	
B. <i>Walztextur</i>					
a) <i>N</i> [1 0 0]	$10^{-11} \cdot E_0$	22,42	22,37	22,62	—
<i>W</i> [0 1 1]	$10^{-11} \cdot E_{15}$	19,95	21,49	21,26	21,89
b) <i>N</i> [$\bar{2}$ 1 1]	$10^{-11} \cdot E_{30}$	16,43	20,05	21,78	20,11
<i>W</i> [0 1 1]	$10^{-11} \cdot E_{45}$	15,30	19,87	20,06	20,41
c) <i>N</i> [1 1 $\bar{1}$]	$10^{-11} \cdot E_{60}$	17,20	21,72	23,67	22,33
<i>W</i> [0 1 1]	$10^{-11} \cdot E_{75}$	22,80	25,07	—	26,30
oder [1 1 $\bar{2}$]	$10^{-11} \cdot E_{90}$	25,64	27,02	26,74	27,34

Die angenommene Textur ist nicht mehr als eine Vermutung, die vom *E*-Verlauf merkwürdig gut bestätigt wird; falls das Eisenblech von Goens und Schmid noch vorhanden ist, könnte eine Röntgenprüfung vielleicht die Entscheidung bringen.

Prüfung anderer Moduln ist bis jetzt nicht möglich. Eine Gußtextur ist, soviel ich weiß, noch nicht bestimmt worden. Voigt ⁶⁵⁾ fand für sechs verschiedene Gußstücke sehr gut übereinstimmende *E*- und *G*-Werte, nur wenige Prozente unter den Isotropiewerten, für *E* und *G* gleich viel. Der Voigtsche Gußstahl war somit wahrscheinlich isotrop, die Erniedrigung von *E* und *G* läßt sich auf den Mischungsfaktor zurückführen: Honda

und Tanaka²⁸⁾ sowie Grüneisen²⁵⁾ fanden E und G für Stahl etwas niedriger als für Eisen, außerdem mag der gegossene Stahl ($\rho = 7,82_2 - 7,82_9$) einigermaßen porös gewesen sein.

Was die Ziehtextur anbelangt: alle Angaben einigen ich auf die einfache Faserung [110]. Die Rechnung ergibt unzweifelhaft für diese Textur eine starke Erhöhung des E und eine noch stärkere Erniedrigung des G vom Isotropiewert aus; die Messungen Kawais³²⁾ ³³⁾ bei Stahl mit 0,15 % C, dessen Moduln vor dem Ziehen fast genau die Isotropiewerte aufwiesen, zeigen aber nach Wegnahme der Eigenspannungen ebenso deutlich eine kleine Erniedrigung von E und eine merkliche Erhöhung von G . Letztere erklärt Kawai wiederum durch die Kornverfeinerung beim Ziehen, erstere durch den Texturfaktor, was mit der (110)-Textur nicht stimmt. Der Versuch liegt nahe, durch eine etwas abgeänderte Texturannahme für E und G zugleich Übereinstimmung zu erreichen und damit, wie beim Kupfer, die undurchsichtige Kornverfeinerung als Erklärungsgrund auszuschalten. Dies gelingt, wenn ich für den schwachen Ziehgrad der Kawaischen Untersuchung eine Streuung von der [110]- nach den [100]- und [010]-Richtungen hin annehme. Soviel ich weiß, ist diese Streuung nicht wahrgenommen; in einer Arbeit von Boas und Schmid²⁾ wird aber bei der Einlenkung der Eisenkristallite in die [110]-Richtung für viele Kristalle der Weg über die (instabile) [100]-Richtung angenommen; besonders bei niederen Ziehgraden mögen viele Kristallite unterwegs steckengeblieben sein. Auch für diese Vermutung wäre eine Nachprüfung sehr erwünscht.

Ist meine Auffassung der Ziehtextur richtig, so müssen die dünnen hartgezogenen Drähte von Jokibe-Sakai³¹⁾ und Kikuta³⁴⁾ weiter zur [110]-Textur vorgerückt sein und daher eine G -Erniedrigung zeigen. In der Tat wiesen erstere bei Eisen und C-armem Stahl G -Werte 7,83 bzw. 7,68 auf, während Kikuta bei ähnlichen Drähten nach Ausglühen auf 900° 8,07 fand, für Stahl nahezu den Isotropiewert. Die Moduln bei gezogenen nichtrekristallisierten Drähten stimmen also zu einer [110]-Textur, wenn auch unvollständig ausgebildet. Ähnliches ergeben die alten E -Messungen Wertheims⁶⁷⁾. Die Deutung seiner Tabellen ist nicht leicht wegen der großen Unregelmäßigkeiten und des Mitspielens bleibender Dehnungen. Jedoch gibt seine Tabelle für Eisen „recuit au rouge sombre“, also nach einem Glühen, wobei wohl die Spannungen entfernt, nicht aber vollständige Rekristallisierung eingetreten ist, für Belastungen bis 25 kg/mm² einen E -Wert 22,7, bis 15 kg/mm² sogar 23,2, einen Wert, der 10 % über dem Isotropiewert liegt und dem E der [110]-Textur (24,8) schon ziemlich nahe rückt.

Der Gitterfaktor offenbarte sich bei den Untersuchungen Kawais, wo die Eigenspannungen E wie G etwa 1% herabsetzten; übrigen lassen sich alle Moduländerungen erklären durch den Texturfaktor, wenn auch in zwei Fällen mit Hilfe einer Texturannahme, welche der Nachprüfung bedarf.

7. *Wolfram*. Dieses Metall eignet sich ganz besonders für die Untersuchung des Gitterfaktors, weil der Texturfaktor hier praktisch Null ist. Als Bridgman⁶⁾ die Einkristallkonstanten bestimmte, fand er die merkwürdige Tatsache, daß W fast genau isotrop ist, das s der Formel (6) ist gleich $-0,015 \cdot 10^{-13}$, $s/s_{11} = -0,006$. Später maß Wright⁷²⁾ die Konstanten an ganz anderem Material (Pintsch-Drähte an Stelle des stabförmigen Einkristalls von Bridgman), das Ergebnis war eine vollständige Bestätigung der Entdeckung Bridgmans. Beim Nachrechnen der zwei am meisten zuverlässigen E -Bestimmungen Wrights erhielt ich $s = +0,016 \cdot 10^{-13}$; der Vergleich mit dem s der Messung Bridgmans ergibt die schönste Bestätigung der Aussprache Wrights: „Tungsten crystals are truly isotropic“.

Wären die Aggregatskonstanten nur von der Textur abhängig, so müßte jeder Modul für alles gegossene und gezogene W einen festen Wert aufweisen. Das Gegenteil zeigt die Tabelle 5.

Ganz sichere Folgerungen lassen sich aus diesen Daten nicht ziehen. Die möglichen Fehler der Modulmessungen sind ziemlich groß, Geiss schätzt die seinigen bei den E -Messungen auf $2\frac{1}{2}\%$, Schönborn auf 7%, während Koenigsberger sie für seine G -Werte auf 8% veranschlagt. Diese Fehlermöglichkeit beruht auf der Unsicherheit bei der Dickenmessung, sie steckt also nicht im Unterschied zweier Moduln desselben Drahtes. Daher folgt aus den Messungen Koenigsbergers unzweideutig eine G -Zunahme beim Tempern, eine schöne Bestätigung der Regel Kawais. Hier wirkt also der Gitterfaktor in der bekannten Weise; dieser, der Mischungsfaktor und die großen Fehler mögen manchen Wert der Tabelle 5 erklären. So z. B. den niedrigen G -Wert von Jokibe und Sakai bei einem ungetemperten, relativ dicken Draht, der [nach der Untersuchung von Geiss und v. Liempt¹⁶⁾ wahrscheinlich weniger dicht war als der Einkristall.

Bei sehr dünnen Drähten (um 20μ) fanden Geiss und v. Liempt demgegenüber eine Dichte höher als die theoretische von 19,37; nach dem Satz von Honda-Kawai sollten hier die Eigenspannungen eine Erhöhung der Moduln herbeiführen. Die Vermutung liegt nahe, die hohen G -Werte der sehr dünnen Nymegen-Drähte Koenigsbergers als Folge dieser Eigenspannungen zu deuten. Diese erhöhten Werte sinken aber beim Tempern

Tabelle 5. Wolfram.

Einkristallkonstanten	Br. ⁶⁾	Wr. ⁷²⁾				
$10^{13} \cdot s_{11}$	2,534	2,573				
$10^{13} \cdot s_{12}$	-0,726	-0,729				
$10^{13} \cdot s_{44}$	6,55	6,604				
$10^{13} \cdot s$	-0,015	0				
Aggregatkonstanten	berechnet		gemessen		Material	Durchm. (μ)
$10^{-11} \cdot G$: Max. Min.	15,31 15,27	15,13 15,13	15,13	Wright ⁷²⁾	Einkr. (Pintsch)	900
			16,8	Geiss ¹⁵⁾	" (Philips)	73—104
			15,5	Koenigsberger ³⁷⁾	" (Pintsch)	50
			18,0	"	" "	30
			18	Koenigsb. ³⁷⁾ (Nym.)	gezog, unget.	21
			20	" "	" , getemp.	26
			19	" "	" , stark gegl.	26
			16,2	" "	" , unget.	31
			16,7	" "	derselbe, get.	31
			7,1	" (Osram)	gezogen, unget.	65
			14,2	" "	" "	31
			15,0	" "	derselbe, get.	31
			16,8	" "	gezogen, "	26
			8,6	" (Siemens)	" , unget.	30
			13,2	J.-S. ³¹⁾ (Tokyo)	" "	430
$10^{-11} \cdot E$: Max. Min.	39,5 39,3	38,9 38,9	38,9	Wright ⁷²⁾	Einkr. (Pintsch)	900
			38,8	Geiss ¹⁵⁾	" (Philips)	73—104
			36,6	Schönborn ⁵⁸⁾	Einkr.	68—89
			32,2			
			36,5	Schönborn ⁵⁸⁾ Geiss ¹⁵⁾ Lasc ⁴²⁾ Dodge ⁴²⁾	gezogen	41—82
			32,5		"	—
$10^{13} \cdot \alpha$	3,24 ₆	3,34 ₅	38,7		"	—
			37,2		"	—
			35,5		—	—
$10^{13} \cdot \alpha$	3,24 ₆	3,34 ₅	3,21	Bridgmann ⁵⁾	gezogen	51
			2,99	"	geschmiedet	groß
			2,7	Richards ⁵¹⁾	—	"

nicht auf das erwünschte Niveau und auch die von Geiss und Koenigsberger unzweideutig nachgewiesene G -Erhöhung bei dünnen Einkristalldrähten läßt sich schwerlich auf Hondasche Spannungen zurückführen. Porosität im gewöhnlichen Sinne kann keinen Modul erhöhen, die Annahme, daß eine Beimischung, vielleicht Thoriumoxyd, das G so stark erhöht, scheint, jedenfalls bei den Einkristalldrähten, sehr wenig wahrscheinlich. Sollte die Kornverfeinerung Kawais wirklich für sich allein den Torsionsmodul vergrößern, so würde sie eventuell den sehr hohen G -Wert des

Nymegen-Drahtes erklären können, nicht aber die G -Zunahme beim Einkristall. Es bleiben nur zwei Möglichkeiten: entweder tritt bei der sehr starken Beanspruchung eine bleibende Gitterdeformation ein, die den Torsionsmodul stark erhöht, oder die Einkristallkonstanten sind nicht ganz genau. Früher habe ich⁷⁾ die letzte Vermutung ausgesprochen (a. a. O., S. 71). Für diese Annahme sprechen die Kompressibilitätsmessungen. Richards und Bartlett⁵⁰⁾ erhielten den Wert $\kappa = 2,8 \cdot 10^{-13}$, 15 % unter dem Wert, der aus den Einkristallkonstanten folgt, und nach Richards⁵¹⁾ späterer Angabe ($2,7 \cdot 10^{-13}$) wird der Unterschied beinahe 20 %. Zwar sind diese κ -Werte wahrscheinlich zu niedrig, aber auch Bridgman⁵⁾ selbst fand bei einem porösen Wolfram ($\rho = 19,137$) κ noch immer 10 % unter dem Wert, der zu den Einkristallkonstanten stimmt. Auch die auffallende Ungleichheit der Moduln bei drei Einkristalldrähten von vergleichbarer Dicke ließe sich erklären bei größerer Anisotropie des Einkristalls. Soviel ich sehe, wird einer solchen Anisotropie aber durch die schönen Messungen Wrights⁷²⁾ entschieden widersprochen und überhaupt scheint nach der Wrightschen Untersuchung Zweifel an den Bridgmanschen Konstanten kaum möglich.

Es bleibt also nur die zweite Annahme einer bleibenden Gitterdeformation übrig. Mit ihr steht das Ergebnis Burgers [zitiert bei Geiss und v. Liempt¹⁶⁾ a. a. O.], daß auch bei den dünnsten W-Drähten die Gitterkonstante ungeändert bleibt, nicht in Widerspruch. Jedoch läßt sich erwarten, daß eine derartige Gitterzertrümmerung, z. B. in der Mantelschicht des Drahtes, sich mit Röntgenstrahlen nachweisen lasse. Gelingt dieser Versuch, so ist damit ein neuer Gitterfaktor aufgedeckt worden, der merkwürdigerweise nur den Torsionsmodul zu erhöhen scheint, den Dehnungsmodul aber ungeändert läßt. Neben diesem vermutlichen Effekt treten bei Wolfram die Wirkungen von Eigenspannungen und Porosität ans Licht (die extrem niedrigen G -Werte werden nach Koenigsberger durch eine Aufspaltung des Drahtes verursacht): beide haben aber nur untergeordnete Bedeutung.

8. *Zusammenfassung.* Das Ergebnis dieser Arbeit läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Bei allen nichtdeformierten Vielkristallen haben die Moduln die nach der Theorie des 2. Abschnitts aus den Einkristallkonstanten berechneten Werte, soweit diese nicht durch Poren oder Beimischungen geändert, im allgemeinen herabgesetzt sind.

2. Die Einkristallkonstanten von Al, Ag und Fe werden durch die Theorie bestätigt. Für Au mögen die exakten Werte der s_{ik} etwa in der

Mitte zwischen den von Goens und Röhl angegebenen Werten liegen. Bei Kupfer sind die vorläufigen Einkristallkonstanten von Goens ziemlich ungenau, die Konstantengruppe Kimuras sowie ein aus den Messungen von Goens und Weerts abgeleitetes Konstantensystem genügen beide der Prüfung. Letztere Konstanten schließen sich den Parametersystemen von Silber und Gold gut an, wie man bei dieser Elementengruppe erwarten möchte.

3. Bei kaltdeformiertem Cu, Al, Ag, Au, Fe verursachen Eigenspannungen besonders bei geringen Deformationsgraden kleine Verminderungen von E und G , die durch gelindes Glühen verschwinden. Übrigens stimmen die berechneten Moduln mit den gemessenen Werten überein in den Fällen, wo von einer am Werkstück bestimmten Textur ausgegangen ist. Fehlt diese Bestimmung, so hat meistens die Rechnung mit den Texturen der Literatur denselben Erfolg. Bei gewalztem und bei schwach gezogenem Eisen tritt Übereinstimmung, und zwar für zwei oder mehr Modulwerte zugleich, bei einer Abänderung der angegebenen Textur auf, diese Änderungen sind für sich annehmbar, brauchen jedoch Röntgenuntersuchungen zu ihrer Bestätigung. Bei gezogenem Silber und Gold tritt Übereinstimmung auf, wenn das angegebene Verteilungsverhältnis der beiden Vorzugslagen etwas abgeändert wird; auch diese Änderung fordert Nachprüfung mit Röntgenstrahlen.

4. Bei den unter 3. aufgezählten Metallen läßt der bleibende Einfluß der Kaltbearbeitung sich restlos aus den Umorientierungen der Kristallite berechnen, ein spezieller Einfluß von Kornverfeinerung oder Gitterzertrümmerung tritt nirgends zutage. Dabei muß jedoch hervorgehoben werden, daß von diesen Metallen kein extrem beanspruchtes Material untersucht worden ist, die dünnsten Drähte maßen noch einige hundert μ .

5. Bei Wolfram tritt bei sehr dünnen Drähten (unter 100 μ) oft, aber nicht immer, eine Erhöhung des Torsionsmoduls, sowohl bei Einkristall- wie bei Vielkristalldrähten auf, die auf einer bleibenden Gitteränderung zu beruhen scheint.

Literaturverzeichnis

- ¹⁾ G. Angenheister, Ann. d. Phys. (4) **11**, 188, 1903. — ²⁾ W. Boas u. E. Schmid, Mitt. deutsch. Materialprüfungsanst. **17**, 53, 1931. — ³⁾ W. Boas u. E. Schmid, Helv. Phys. Acta **7**, 628, 1934. — ⁴⁾ M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, 1923. — ⁵⁾ P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. **58**, 165, 1922/23. — ⁶⁾ P. W. Bridgman, ebenda **60**, 306, 1925. — ⁷⁾ D. A. G. Bruggeman, Diss. Utrecht, 1930. — ⁸⁾ D. A. G. Bruggeman, Naturwissensch. **19**, 814, 1931. — ⁹⁾ J. Czochralski, ZS. f. Metallkde. **15**, 60, 1923. — ¹⁰⁾ J. Czochralski u. E. Schmid, ebenda **18**, 1, 1926. —

- ¹¹⁾ P. Debye, Ann. d. Phys. **39**, 789, 1912. — ¹²⁾ M. Ettisch, M. Polanyi u. K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **7**, 181, 1921. — ¹³⁾ A. Eucken, K. Clusius, K. Wortinek, ZS. f. anorg. Chem. **203**, 47, 1931. — ¹⁴⁾ A. Eucken u. H. Werth, ebenda **188**, 152, 1930. — ¹⁵⁾ W. Geiss, Physica **3**, 322, 1923. — ¹⁶⁾ W. Geiss u. J. A. M. van Liempt, Ann. d. Phys. **77**, 105, 1925. — ¹⁷⁾ R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, 1927. — ¹⁸⁾ R. Glocker u. E. Kaupp, ZS. f. Phys. **24**, 121, 1924. — ¹⁹⁾ R. Glocker u. H. Widmann, ZS. f. Metallkde. **19**, 41, 1927. — ²⁰⁾ E. Goens, Naturwissensch. **17**, 180, 1929. — ²¹⁾ E. Goens, Ann. d. Phys. **17**, 233, 1933. — ²²⁾ E. Goens u. E. Schmid, Naturwissensch. **19**, 520, 1931. — ²³⁾ E. Goens u. J. Weerts, ZS. f. Instrkde. **52**, 167, 1932. — ²⁴⁾ v. Göler u. G. Sachs, ZS. f. Metallkde. **19**, 90, 1927. — ²⁵⁾ E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **22**, 801, 1907; **25**, 825, 1908. — ²⁶⁾ P. Harteck u. K. Clusius, ZS. f. phys. Chem. **134**, 243, 1928. — ²⁷⁾ K. Honda, Sc. Rep. Tôhoku Univ. **8**, 51, 1919. — ²⁸⁾ K. Honda u. T. Tanaka, ebenda **15**, 1, 1926. — ²⁹⁾ K. Honda u. R. Yamada, ebenda **17**, 723, 1928. — ³⁰⁾ A. Huber u. E. Schmid, Helv. Phys. Acta **7**, 620, 1934. — ³¹⁾ K. Jokibe u. S. Sakai, Sc. Rep. Tôhoku Univ. **10**, 1, 1921. — ³²⁾ T. Kawai, ebenda **19**, 209, 1930. — ³³⁾ T. Kawai, ebenda **20**, 681, 1931. — ³⁴⁾ T. Kikuta, ebenda **10**, 139, 1921. — ³⁵⁾ R. Kimura, ebenda **22**, 533, 1933. — ³⁶⁾ H. Klinkhardt, Ann. d. Phys. **84**, 167, 1927. — ³⁷⁾ J. Koenigsberger, ZS. f. Phys. **40**, 719, 1926. — ³⁸⁾ F. Körber, Stahl u. Eisen **45**, 217, 1925. — ³⁹⁾ W. Köster, ZS. f. Metallkde. **18**, 112, 1926. — ⁴⁰⁾ W. Kuntze, ebenda **20**, 145, 1928. — ⁴¹⁾ G. Kurdjumow u. G. Sachs, ZS. f. Phys. **62**, 592, 1930. — ⁴²⁾ Landolt-Börnstein, I. Ergänzungsband, 1927. — ⁴³⁾ Landolt-Börnstein, II. Ergänzungsband, 1931. — ⁴⁴⁾ H. Mark u. K. Weissenberg, ZS. f. Phys. **16**, 328, 1923. — ⁴⁵⁾ W. Müller, Forschungsarb. d. Ver. d. Ing. 1918, Nr. 211. — ⁴⁶⁾ W. Nernst u. F. A. Lindemann, Ber. preuß. Akad. Berlin 1912, S. 1160. — ⁴⁷⁾ M. Polanyi, ZS. f. Phys. **17**, 42, 1923. — ⁴⁸⁾ A. Portevin u. P. Chevenard, C. R. **181**, 716, 1925. — ⁴⁹⁾ A. Reuss, ZS. f. angew. Math. u. Mech. **9**, 49, 1929. — ⁵⁰⁾ Th. W. Richards u. E. P. Bartlett, Journ. Amer. Chem. Soc. **37**, 470, 1915. — ⁵¹⁾ Th. W. Richards, ebenda **37**, 1643, 1915. — ⁵²⁾ H. Röhl, Ann. d. Phys. **16**, 887, 1933. — ⁵³⁾ G. Sachs, Prakt. Metallkde. II, 1934. — ⁵⁴⁾ E. Schmid, ZS. f. Metallkde. **20**, 370, 1928. — ⁵⁵⁾ E. Schmid u. G. Wassermann, ZS. f. Phys. **40**, 451, 1926. — ⁵⁶⁾ E. Schmid u. G. Wassermann, ZS. f. Metallkde. **19**, 325, 1927. — ⁵⁷⁾ E. Schmid u. G. Wassermann, ebenda **23**, 87, 1931. — ⁵⁸⁾ H. Schönborn, ZS. f. Phys. **8**, 677, 1922. — ⁵⁹⁾ W. Schrieffer, Phys. Rev. **20**, 96, 1922 (zitiert bei Geiss, a. a. O.). — ⁶⁰⁾ G. Tammann u. A. Heinzel, ZS. f. anorg. Chem. **167**, 173, 1927. — ⁶¹⁾ G. Tammann u. H. H. Meyer, ZS. f. Metallkde. **19**, 82, 1927. — ⁶²⁾ W. Voigt, Ber. preuß. Akad. Berlin 1883, S. 961; 1884, S. 1004. — ⁶³⁾ W. Voigt, Gött. Abhandl. 1887, S. 48; Wied. Ann. **38**, 573, 1889. — ⁶⁴⁾ W. Voigt, ebenda **42**, 537, 1891; **44**, 161, 1891. — ⁶⁵⁾ W. Voigt, ebenda **48**, 674, 1893. — ⁶⁶⁾ W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphys., ungeänderter Nachdruck, 1928. — ⁶⁷⁾ G. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) **12**, 385, 1849. ⁶⁸⁾ J. Weerts, ZS. f. Metallkde. **25**, 101, 1933. — ⁶⁹⁾ F. Wever, ZS. f. Phys. **28**, 69, 1924. — ⁷⁰⁾ F. Wever, ZS. f. techn. Phys. **8**, 404, 1927. — ⁷¹⁾ F. Wever u. W. E. Schmid, Mitt. a. d. Kaiser Wilhelm-Inst. f. Eisenforsch. **11**. — ⁷²⁾ S. J. Wright, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 613, 1930.

Wassenaar (Holland), 23. Oktober 1934.

Die Absorption der Ultrastrahlung in verschiedenen Materialien.

Von **Herbert Tielsch** in Königsberg, Pr.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1934.)

Mit einer Hochdruckionisationskammer wird ein genügend harter und mit Sekundärstrahlung gesättigter Teil der Ultrastrahlung in bezug auf seine Absorption durch verschiedene Materialien untersucht. Aus den erforderlichen langen Meßreihen wird der Gang der Ultrastrahlung mit dem Luftdruck (Barometereffekt), mit der Zeit und mit der Temperatur bestimmt. Störende Einflüsse aller solcher Intensitätsänderungen werden durch ein geeignetes Meßverfahren weitgehend ausgeschaltet. Bei verschiedenen Materialien werden unter Veränderung der Schichtdicke Intensitätskurven aufgenommen, aus denen sich äquivalente Schichten bestimmen lassen. Darüber hinaus werden unter Berücksichtigung der geometrischen Anordnung des Panzermaterials die Absolutwerte der Absorptionskoeffizienten bestimmt. Für Luft wird sein Wert aus dem Barometereffekt berechnet. Eine Diskussion der Meßresultate an Hand vorliegender Theorien läßt die Möglichkeit eines γ -Strahlcharakters der Ultrastrahlung sehr unwahrscheinlich erscheinen. Die auf Grund vorliegender theoretischer Bremsformeln für eine Strahlung geladener Korpuskeln durchgeführten Ausrechnungen geben einen ähnlichen Gang der Schwächung pro Schalen-elektron mit der Ordnungszahl, wie er beobachtet wird.

1. Problemstellung. In der ersten Zeit der Ultrastrahlungsforschung nahm man an, daß Schichten gleicher Masse von verschiedenen Absorptionsmaterialien gleich schwächend wirkten. Die Fortschritte auf dem Gebiet der γ -Strahlforschung (Schwächung durch Comptonstreuung an den relativ freien Hüllelektronen) wurden dann auf die Ultrastrahlung übertragen, der man wegen ihrer großen Durchdringungsfähigkeit Wellennatur zuschrieb. Die Schwächung sollte demnach ausschließlich durch Streuung erfolgen, die Photoabsorption dagegen vollständig zurücktreten. Da gegenüber der Energie der Ultrastrahlung die Bindungsenergie der Kernelektronen gering ist, betrachtete Jeans¹⁾ auch diese als frei und in gleicher Weise an der Streuung beteiligt. Die während der letzten Epoche erzielten Fortschritte in der Ultrastrahlungsforschung haben gezeigt, daß die früher gemachte Voraussetzung einer Wellennatur zumindestens für einen Teil der Ultrastrahlung nicht zutrifft und daß außerdem ganz neuartige Schwächungsprozesse auftreten (Bildung von „Elektronenpaaren“ und „Schauern“). Die Schwächung einer Strahlung von geladenen Korpuskeln hoher Geschwindigkeit, die fast ausschließlich durch Bremsung erfolgt, ist in letzter

¹⁾ J. H. Jeans, Nature **127**, 945, 1931; **128**, 301, 1931.

Zeit eingehend theoretisch diskutiert worden¹⁾. Für alle diese Annahmen schien deshalb die Gewinnung sauberer experimenteller Unterlagen über den Einfluß verschiedener Materialien auf die Schwächung der Ultrastrahlung wichtig.

Der vorliegenden Arbeit lag die Aufgabe zugrunde, ohne jede Annahme über den Vorgang der Schwächung experimentell festzustellen, welche Schichtdicken von verschiedenen Materialien die Ultrastrahlung gleich schwächen. Untersucht wurde die Strahlung, die nach einer Filterung durch mindestens 24 cm Bleiäquivalent im Meeresniveau noch vorhanden ist. Für einen anderen Energiebereich könnten sich andere äquivalente Schichtdicken ergeben. Die Untersuchungen müßten daher noch auf andere Bereiche der Ultrastrahlung ausgedehnt werden.

2. *Die Meßapparatur.* Die Meßapparatur bestand aus einer stählernen Ionisationskammer von 3,36 Liter Inhalt mit Hoffmann-Elektrometer. Ihre

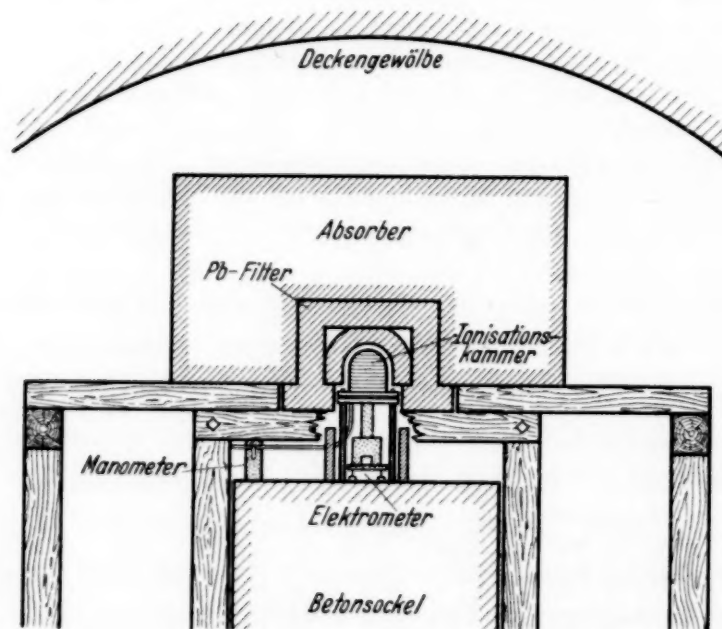


Fig. 1. Aufbau der Meßapparatur.

Wand war seitlich 0,6 und in der Kuppel 0,9 cm stark. Bei den Hauptmessungen war die Kammer mit CO_2 von 28,4 kg/cm² Druck bei 0° gefüllt. Die während zweier Stunden abgeschiedenen Ionenmengen wurden photographisch registriert, wobei die Methode der einmaligen Kompensation nach Steinke²⁾ benutzt wurde.

¹⁾ C. Möller, Ann. d. Phys. **14**, 531, 1932; W. Heisenberg, ebenda (5) **13**, 450, 1932; H. Bethe, ZS. f. Phys. **76**, 293, 1932; F. Bloch, ebenda **85**, 693, 1933; Ann. d. Phys. **16**, 285, 1933. — ²⁾ E. G. Steinke, Phys. ZS. **30**, 767, 1929.

Als Beobachtungsraum diente ein Keller im Institutsgebäude. Die Mauern und Betonmassen der gewölbten Decke sowie des Gebäudes würden die Ultrastrahlung wie etwa 8 cm Pb schwächen. Zur Vermeidung der Übergangseffekte war die Kammer ständig mit einem 16,5 cm dicken Bleifilter umgeben (Fig. 1). Außen herum konnten die Absorptionsmaterialien bis zu Schichtdicken von 85 cm gepackt werden. In die Kammer konnte nur Primärstrahlung und die mit ihr im Gleichgewicht stehende Sekundärstrahlung aus dem Bleifilter gelangen. Sekundärstrahlen aus dem Material dagegen wurden im Filter aufgehalten, da dessen Stärke größer als das Übergangsgebiet war, wie es sich aus den Messungen von Schindler¹⁾ ergibt²⁾. Durch diese Art der Nachfilterung war die primäre Strahlung ständig mit Bleisekundärstrahlung gesättigt und dadurch die gemessene Intensität direkt der primären proportional.

Die Apparatur stand auf einem schweren Betonsockel, der mit einem außen herum gestellten Holzaufbau die Unterlage für die Panzerung bildete. Die Wand der Ionisationskammer lag an einer Spannung von 160 Volt. Die Empfindlichkeit des Elektrometers war so eingestellt, daß einer Ladungsmenge von $0,104 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^3$ auf dem System S ein Ausschlag von 1 cm auf der 2,1 m entfernten Registriervorrichtung entsprach. Die Eichung (Fig. 2) konnte mit Hilfe des Kondensators C vorgenommen werden, der an bekannte Spannung (0,056 Volt) gelegt wurde. Seine Kapazität (29,17 cm) wurde durch Vergleich mit einem Normalkondensator bestimmt⁴⁾. Die Kompensation der übergegangenen

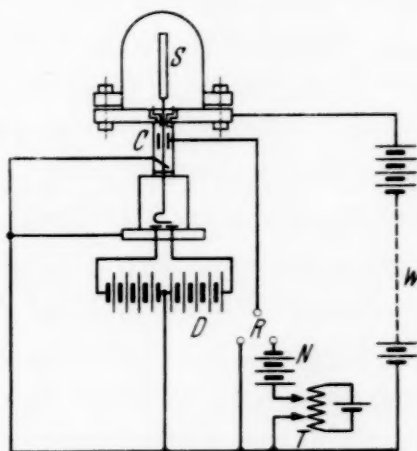


Fig. 2. Schaltschema der Versuchsanordnung.

¹⁾ H. Schindler, Phys. ZS. **72**, 625, 1929. — ²⁾ Diese Annahme steht im Widerspruch zu der früheren Auffassung von Kulenkampff (Phys. ZS. **30**, 561, 1929), der aus der Klein-Nishina-Formel (ebenda **52**, 853, 1929) folgert, daß erst bei sehr großen Schichtdicken der Sättigungszustand erreicht wird. Die experimentellen Tatsachen rechtfertigen jedoch meine Überlegungen und zeigen, daß die frühere Annahme von Kulenkampff für die Ultrastrahlung nicht zutrifft, wahrscheinlich, weil die Energieübertragung an die Sekundärstrahlung nicht durch Compton-Prozesse erfolgt. Nach Kulenkampff wären auch keine Übergangseffekte zu erwarten, sondern die Sekundärstrahlung müßte für alle Materialien einheitlich sein. — ³⁾ $1 \text{ Volt} \cdot \text{cm} = 7 \cdot 10^6$ Elementarladungen. — ⁴⁾ Näheres hierüber: E. G. Steinke, ZS. f. Phys. **48**, 651, 1928.

Ionisationsladungen erfolgte ebenfalls mit Hilfe dieses Kondensators und eines elektromagnetisch betätigten Relais *R*.

3. *Die Ionisation in der Kammer.* Die Ionisation in der Kammer ist der abgeschiedenen Elektrizitätsmenge proportional. Zur Umrechnung auf die üblichen Angaben (Ionen/sec cm³ Normalluft) muß das Volumen der Kammer (3,36 Liter) und die Verstärkung durch die Füllung mit Kohlensäure bei erhöhtem Druck berücksichtigt werden. Der Verstärkungsfaktor gegenüber Normalluft wurde früheren Messungen entnommen und betrug bei 28,4 kg/cm² 14,83. Die Aufladezeit betrug genau 113,53'. Einer Aufladung von 1 Volt · cm in 113,53' entspricht demnach eine Ionisierung von $\frac{7 \cdot 10^6}{113,53 \cdot 60 \cdot 3360 \cdot 14,83} = 0,2062 J$ (Ionenpaare/sec cm³ Normalluft).

Obwohl eine Unkenntnis des nicht durch die Ultrastrahlung verursachten Ionisationsanteiles keinen Einfluß auf die Bestimmung äquivalenter Schichtdicken von verschiedenen Materialien hat, kann zu einem angenäherten Vergleich des Intensitätsabfalls mit den Messungen anderer Autoren auf seine Schätzung nicht verzichtet werden¹⁾. Von einer ähnlichen Apparatur hat Steinke²⁾ im Albulatunnel unter 1000 m Gestein die Eigenionisation zu 0,2 *J* bestimmt³⁾. Ebenso hoch wurde auch hier der Restgang angenommen. Bei dem von mir benutzten Aufbau kommt noch die aus dem unteren Betonsockel stammende Radiumstrahlung hinzu, die nicht voll abgeschirmt werden konnte. Sie wurde aus einigen Vergleichsmessungen mit verschiedener Abschirmung zu etwa 0,1 *J* geschätzt, so daß sich die nicht von der Ultrastrahlung verursachte Ionisation zu etwa 0,3 *J* oder 14,65 Volt · cm/113,53' ergab. Die gesamte hinter dem 16,5 cm Bleifilter gemessene Ionisation betrug 78,19 Volt · cm/113,53' oder 1,612 *J*, wonach demnach 63,54 Volt · cm/113,53' oder 1,310 *J* der Ultrastrahlung allein zugeschrieben wurden.

4. *Die Intensitätsschwankungen der Ultrastrahlung.* Die Ultrastrahlungsintensität unterliegt gewissen Schwankungen, die zum Teil durch äußere Einflüsse, zum Teil durch die natürlichen Schwankungen der nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen auf die Kammer auffallenden Ultrastrahlungsimpulse hervorgerufen werden. Bei der benutzten Ionisationskammer ergibt sich nach möglichster Ausschaltung aller äußeren Einflüsse aus 66 Doppel-

¹⁾ Auf die Fehler, die dabei durch eventuell falsch angenommenen Restgang hervorgerufen sein können, wird später in § 6 eingegangen werden. —

²⁾ E. G. Steinke, ZS. f. Phys. **48**, 647, 1928. — ³⁾ Die Angabe in *J* beim Restgang dient nur zum Vergleich mit der meist auch in *J* erfolgten Angabe der Ultrastrahlungsionisation. Es wird dazu derselbe Umrechnungsfaktor benutzt, obwohl der Restgang eine andere Druckionisationskurve zeigt.

stunden eine Schwankung der zweistündig gemessenen Ionisation von $\pm 0,603$ Volt·cm. Das sind 0,77 % der Gesamtionisation bzw. 0,95 % der Ultrastrahlungsintensität. Nach Untersuchungen von Steinke¹⁾ entspricht dieses der nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen zu erwartenden Schwankung der auf die Kammer auffallenden Strahlungsimpulse²⁾.

Da wegen der Härte der Strahlung von den in relativ geringen Schichtdicken zur Verfügung stehenden Absorbern nur ein kleiner Intensitätsanteil verschluckt wird, kann dieser wegen der durch die natürlichen Schwankungen beschränkten Meßgenauigkeit in kurzer Zeit nicht sicher genug bestimmt werden. Zur Erhöhung der Genauigkeit sind deshalb lange Meßreihen erforderlich. Bei langen Meßreihen können andererseits die gesuchten Effekte dadurch verdeckt werden, daß sonstige durch äußere Einflüsse hervorgerufene Schwankungen (Barometereffekt, Jahresgang, Schwankungen zweiter Art) sich nicht vollständig eliminieren lassen. Es mußte deshalb nach einem Meßverfahren gearbeitet werden, das trotz der langen Meßzeit die Ultrastrahlungsschwankungen möglichst weitgehend ausschalten ließ³⁾. Zur Erreichung dieses Zieles wurde mehrmals abwechselnd 2 Tage lang die Intensität ohne Absorber nur hinter 16,5 cm Bleifilter (sogeannter Nullwert) und 2 Tage lang mit dem dazugepackten Absorber gemessen. Alle Beobachtungswerte gleicher Abschirmung wurden zunächst zu 6 Stunden-Mitteln zusammengefaßt, mit einem aus langen Meßreihen bestimmten Korrektionswert auf 760 mm Luftdruck reduziert und dann zu 2 Tages-Mittelwerten vereinigt⁴⁾. Durch Differenzbildung gegen das Mittel des vorher und hinterher gemessenen und auf 760 mm Hg korrigierten Nullwertes konnte dann der von dem zusätzlichen Absorber verschluckte Anteil bestimmt werden. Durch Subtraktion dieses mehrmals bestimmten Wertes von dem mittleren Nullwert ergab sich die mittlere Intensität hinter zusätzlichem Absorber.

Von allen durch äußere Einflüsse hervorgerufenen Intensitätsänderungen überwiegt der Gang mit dem Luftdruck bei weitem. Aus den ständigen Kontrollmessungen des Nullwertes läßt sich der Barometereffekt $\left(BE = -100 \frac{d \ln J}{d h} \right)$ bestimmen. Auch Messungen mit anderer Panzerung

¹⁾ E. G. Steinke, ZS. f. Phys. 64, 48, 1930. — ²⁾ Wegen der kurzen Beobachtungszeit von 66 Doppelstunden tritt eine merkliche Beeinflussung durch große Ionisationsstöße nicht ein, da diese zu selten auftreten. — ³⁾ Von einer Differentialapparatur, wie sie Schindler benutzte, mußte aus technischen Gründen wegen des umfangreichen Panzeraufbaues Abstand genommen werden. — ⁴⁾ Lagen zwischen den Messungen mit und ohne Absorber starke Barometeränderungen, so wurden solche Messungen nicht verwertet.

können zur Berechnung herangezogen werden, wenn sie eine genügend lange Zeit umfassen. Als solche kommen noch die zu anderen Zwecken mit 14,7 cm Pb- und 20 cm Fe-Filterung (anstatt des 16,5 cm Pb-Panzers) durchgeführten Meßreihen in Betracht. Über alle 6 Stunden-Werte, die bei demselben mittleren Barometerstand innerhalb eines Intervalls von $\pm 0,5$ mm Hg gemessen sind, wurde gemittelt. Die Abhängigkeit dieser mittleren Intensitätswerte vom Barometerstand stellt Fig. 3 dar. Aus

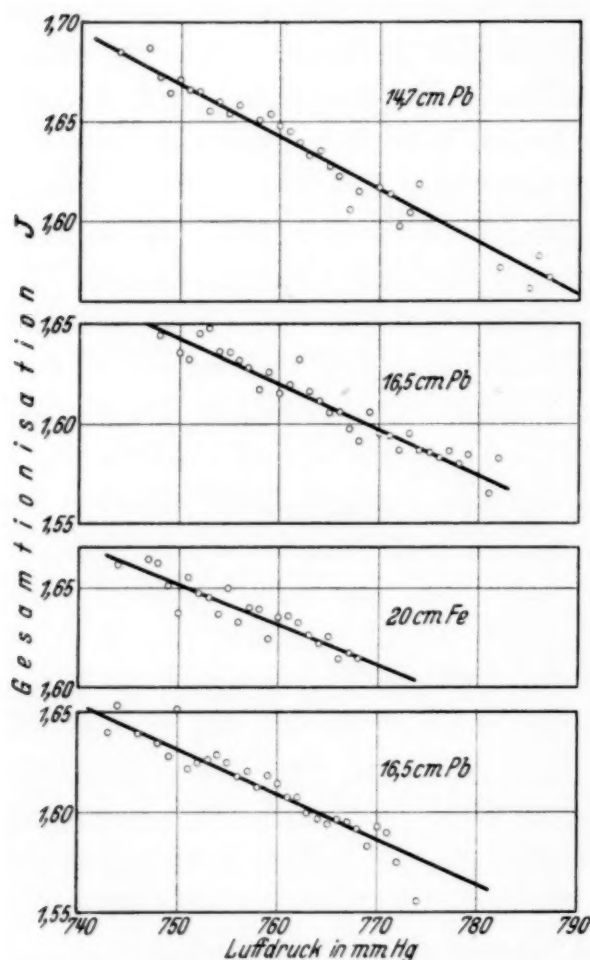


Fig. 3. Die Änderung der Gesamtionisation mit dem Luftdruck.

Einflüsse hinweisen. Eventuelle innerhalb einer Meßreihe auftretende Schwankungen wurden nicht berücksichtigt. Mit dem für jede Meßreihe bestimmten BE wurde die Korrektur auf Normalbarometerstand durchgeführt.

Langsam verlaufende Intensitätsänderungen können bei der benutzten Meßmethode keinen Einfluß auf die Bestimmung der von den Absorbern verschluckten Intensitätsanteile ausüben. Zur Informierung, von welcher Größe solche Schwankungen sein können, sind in Fig. 4 die Mittelwerte

diesen Werten wurde durch Korrelationsrechnung die Änderung der Intensität mit dem Luftdruck bestimmt. Die errechneten Neigungen sind in die Figur eingezeichnet, die Werte enthält Tabelle 1. Die letzten Spalten geben die Änderung der Ultrastrahlungsintensität an, wenn sich der Luftdruck um 1 cm Hg ändert. Diese ist einmal in J angegeben (Spalte 8), des weiteren in Prozenten, wobei einmal der Restgang gleich 0,302 J (Spalte 9), ein zweites Mal gleich 0,100 J (Spalte 10) gesetzt ist. Auf den Barometereffekt bei Annahme verschiedener Restgänge wird später (§ 6) noch genauer eingegangen werden. Die Barometereffekte der einzelnen Meßreihen zeigen gewisse Abweichungen, die noch auf andere

Tabelle 1. Der Barometereffekt der Ultrastrahlung.

1	2	3	4	5
Zeit	Panzerung	Korrelations- koeffizient $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \cdot \sum y^2}}$	Intensitätsmittel	
			Gesamtionisation J	Ultrastrahlung J
17. 8. — 26. 11. 32	14,7 cm Pb	$0,976 \pm 0,005$	1,639	1,337
1. 12. — 14. 5. 33	16,5 „ Pb	$0,957 \pm 0,006$	1,610	1,308
16. 5. — 16. 7. 33	20 „ Fe	$0,914 \pm 0,016$	1,633	1,331
18. 7. — 16. 11. 33	16,5 „ Pb	$0,951 \pm 0,007$	1,610	1,308

1	6	7	8	9	10
Zeit	Luftdruckmittel mm Hg	Ultrastrahlung bei 760 mm Hg J	Barometereffekt		
			$J/\text{cm Hg}$	$\text{‰}/\text{cm Hg}$ $R = 0,302 J$	$\text{‰}/\text{cm Hg}$ $R = 0,100 J$
17. 8. — 26. 11. 32	761,7	1,341	— 0,0268	— 2,00	— 1,74
1. 12. — 14. 5. 33	764,5	1,318	— 0,0231	— 1,75	— 1,52
16. 5. — 16. 7. 33	759,5	1,330	— 0,0204	— 1,53	— 1,33
18. 7. — 16. 11. 33	759,5	1,307	— 0,0226	— 1,73	— 1,50

der Gesamtionisation in Monatsdritteln sowie die zugehörigen Raumtemperaturen aufgetragen. Ein Gang der Intensität mit der Temperatur ist überraschenderweise¹⁾ nicht festzustellen. Es zeigt sich aber ein langsames Absinken der Intensität im Laufe der Zeit. Die errechnete Neigung ist mit eingezeichnet (Fig. 4). Während des Jahres 1933 beträgt der Intensitätsabfall im Monat $1,2 \text{‰}$ der Gesamtionisation. Ein Ausfließen des Füllgases konnte am Manometer nicht festgestellt werden²⁾. Es muß sich deshalb um eine wirkliche Strahlungsänderung gehandelt haben. Es ist beachtlich, daß eine zweite Ionisationskammer (Steinke-Standardapparat) hinter 10 cm Pb, die im hiesigen Institut aufgestellt war, vom 1. Januar 1932

¹⁾ R. Wolf (ZS. f. Phys. **75**, 570, 1932) findet bei einer mit CO_2 unter 21,5 Atm. gefüllten Kammer mit eingebautem Hoffmannschen Netz eine Intensitätszunahme von 1‰ bei einer Feldspannung von 250 Volt und einer Temperaturerhöhung von 4° . Als Strahlungsquelle diente ihm ein Ra-Präparat. Die von Wolf aufgenommenen Intensitätskurven in Abhängigkeit von der Feldspannung bei festgehaltener Temperatur überschneiden sich. In einem solchen Überschneidungspunkt tritt eine Temperaturabhängigkeit für einen gewissen Bereich nicht auf. Es ist möglich, daß mit der benutzten Hochdruckkammer gerade an solch einer Stelle gearbeitet worden ist. — ²⁾ Da die Verstärkung der Ionisation mit zunehmendem Druck des Füllgases immer geringer wird, hätte dem beobachteten Intensitätsabfall von $1,5 \text{‰}$ eine Druckabnahme von ungefähr $1,5 \text{ kg/cm}^2$ während dieser Zeit entsprechen müssen, während der Druck bei Umrechnung auf Normaltemperatur innerhalb $0,1 \text{ kg/cm}^2$ konstant blieb.

bis zum 10. Oktober 1933 ebenfalls einen Intensitätsabfall und zwar von $1,5^0_{00}$ im Monat zeigte. Am Ende des Jahres stieg die Intensität dieser

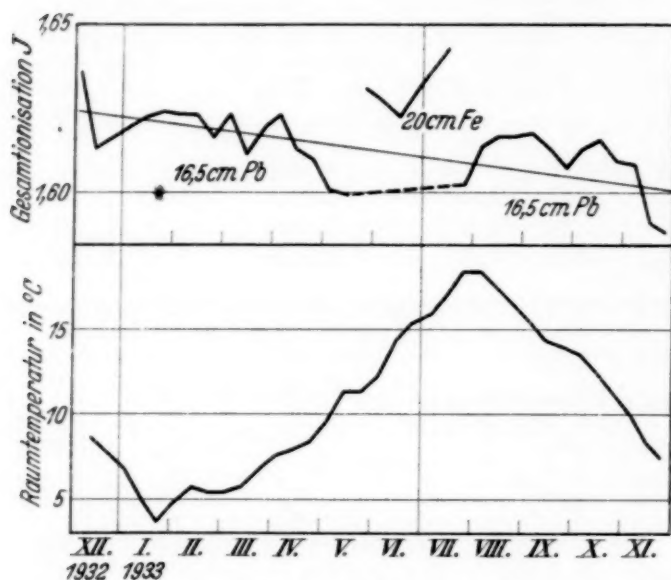


Fig. 4. Die zeitliche Änderung der auf 760 mm Hg korrigierten Gesamtionisation und der Raumtemperatur.

(5. Juli 1933) korrigiert und zu Monatsmittelwerten zusammengefaßt. Aus Fig. 5 ist ersichtlich, daß eine Temperaturabhängigkeit dieser Werte, wenn sie überhaupt vorhanden wäre, kleiner als $0,5^0_{00}$ pro Grad sein müßte.

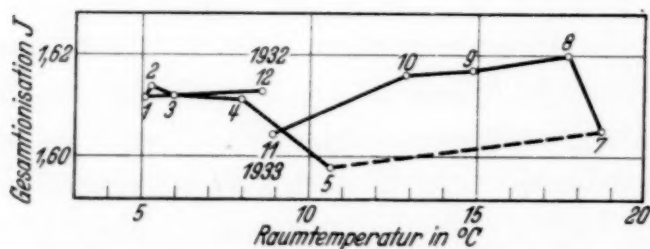


Fig. 5. Die Abhängigkeit der Gesamtionisation von der Raumtemperatur. (Der Gang mit dem Luftdruck und der zeitliche Intensitätsabfall sind korrigiert.)

Apparatur dann wieder auf ihren ursprünglichen Wert an. Leider mußten die Messungen mit meiner Apparatur zu diesem Zeitpunkt abgebrochen werden.

Es ist noch genauer zu kontrollieren, ob nicht durch den zeitlichen Intensitätsabfall eine Temperaturabhängigkeit verdeckt wird. Die zu Monatsdritteln vereinigten Ionisationswerte wurden auf eine mittlere Zeit

5. Absorptionsmes-

sungen. Zur ersten Orientierung über die Absorption wurde der Intensitätsabfall mit zunehmender Bleidicke untersucht. Der Bleiaufbau war hier zunächst ein anderer als später bei den Hauptmessungen.

Die Ionisationskammer war so mit einem würfelförmigen 10 cm dicken Bleipanzer umgeben, daß zwischen Kammer und Panzer noch allseitig bis zu 20 cm dicke Schichten gepackt werden konnten¹⁾. Für jede Schicht-

¹⁾ Bei diesem Vorversuch arbeitete die Apparatur noch unter anderen Bedingungen als bei den Hauptmessungen. Die Kammer hatte eine dünne Innenelektrode, die später zur Erzielung einer besseren Feldverteilung durch eine stärkere ersetzt wurde. Die Wandspannung betrug nur 80 Volt, die Aufladezeit 51,5 Minuten, der Druck $29,5 \text{ kg/cm}^2$. Die Umrechnung auf J wurde

dicke wurde die absorbierte Intensität durch Differenzbildung gegen die vorher und hinterher gemessene 10 cm Pb-Intensität bestimmt (Tabelle 2). Durch Abzug dieser Intensität von der mittleren Nullintensität der ganzen Meßreihe erhält man den Wert hinter der zusätzlichen Absorberschicht (Spalte 2). Mit der angegebenen Umrechnung läßt sich der Intensitätswert in J angeben. In der letzten Spalte ist noch die logarithmische Neigung der Intensitätskurve ausgerechnet. In Fig. 8 sind die soeben bestimmten Intensitätswerte durch Kreise angedeutet. Es zeigt sich bei logarithmischer Auftragung im Bereiche von 10 bis 12 cm Blei ein stärkerer Intensitätsabfall als bei größeren Schichtdicken. Bei einer Vorfilterung mit 16,5 cm Blei, wie sie später benutzt wurde, ist dagegen eine genügende Homogenität der Strahlung erreicht.

Tabelle 2. Die Absorption der Ultrastrahlung in Blei.

1	2	3	4	5
Bleidicke cm	Intensität hinter Absorber		$\log J$	$\alpha = -\frac{d \log J}{d h}$
	V · cm in 51,5'	J		
10	32,81	1,370	0,13 672	$4,00 \cdot 10^{-3}$
12	32,21	1,345	0,12 872	
15	31,75	1,326	0,12 254	
20	30,83	1,287	0,10 958	$2,31 \cdot 10^{-3}$
30	29,26	1,222	0,08 707	

In dem nächsten Meßgange wurde unter Benutzung des 16,5 cm Pb-Filters, das die Kammer eng umschloß, der Intensitätsabfall hinter verschiedenen Schichten von Blei, Eisen und Aluminium¹⁾ aufgenommen. Alle diese Metalle standen in sauber gegossenen rechteckigen Quadern zur Verfügung, so daß die daraus zusammengesetzte Panzerung praktisch keine Ritzen und Hohlräume hatte. Die spezifischen Gewichte wurden den Angaben von Schindler entnommen. Aluminium stand nur in relativ geringen Mengen zur Verfügung, so daß die hiermit erzielte Meßgenauigkeit nicht so groß wie bei den anderen Stoffen ist. In einem weiteren Meßgang wurden Kohle, Quecksilber und Wasser untersucht. Zu den Kohle-

so gewählt, daß diese Bleikurve mit der später bei den Hauptmessungen aufgenommenen zusammenfällt. Es interessieren ja doch nur die logarithmischen Neigungen.

¹⁾ Das vorläufige Ergebnis dieser Untersuchungen wurde schon in einer Vorveröffentlichung (E. G. Steinke u. H. Tielsch, ZS. f. Phys. **84**, 425, 1933) mitgeteilt. Die jetzigen endgültigen Zahlen unterscheiden sich nur unwesentlich von den damals angegebenen.

messungen wurden große Steinkohlenbriketts benutzt. Ein Stück wog 6,7 kg. Das spezifische Gewicht der Steinkohle betrug 1,24. Mit Einrechnung der beim Packen entstandenen Hohlräume ergab sich durch genaue Auswägung eine durchschnittliche Dichte des zusammengesetzten Absorbers von 1,15. Zu den Messungen mit Wasser wurden um das Bleifilter Bottiche aus 0,5 mm starkem Zinkblech herumgestellt, so daß das Bleifilter mit 80 cm Wasser allseitig umgeben werden konnte. Seitlich wurde der ganze Aufbau von Holzlatten und Eisenschienen zusammengehalten. Zur Füllung waren 4,8 m³ Wasser nötig. Zur Kontrolle des Nullwertes wurde nur das Wasser abgelassen, während der ganze Aufbau sonst stehen blieb. Bei den Messungen mit Quecksilber konnte die Apparatur nur oben mit Hg abgeschirmt werden, während sie seitlich mit 4 cm Blei umgeben wurde. Das Quecksilber (114 kg) wurde in eine Wanne aus 1 mm starkem Eisenblech eingefüllt, die auch während der Kontrollmessungen des Nullwertes oben blieb.

Tabelle 3. Die Absorption der Ultrastrahlung in verschiedenen Materialien. Innenfilter 16,5 cm Pb.

1	2	3	4	5	6
Material <i>M</i>	Schicht- dicke <i>D</i> cm	Intensität hinter Absorber		log <i>J</i>	$\alpha = - \frac{d \log J}{d h}$
		V · cm in 113,53'	<i>J</i>		
Nullwert (hinter 16,5 cm Pb) . . .		63,54	1,310	0,1173	
Pb	10	60,39	1,245	0,0952	} $2,23 \cdot 10^{-3}$
	19,4	57,48	1,185	0,0737	
	20	57,40	1,183	0,0729	
Fe	2	62,91	1,297	0,1129	} $1,88 \cdot 10^{-3}$
	4	62,44	1,288	0,1099	
	10	60,77	1,253	0,0980	
	14	59,84	1,234	0,0913	
	20	58,32	1,203	0,0803	
	30,7	55,63	1,147	0,0596	
Al	2	63,34	1,306	0,1159	} $0,61 \cdot 10^{-3}$
	4	63,26	1,304	0,1153	
	10	62,57	1,290	0,1106	
	14	62,32	1,285	0,1089	
C	46	61,11	1,260	0,1004	} $0,348 \cdot 10^{-3}$
	85	59,44	1,226	0,0885	
Hg	3,34	61,86	1,275	0,1055	$3,5 \cdot 10^{-3}$
H ₂ O	80	59,51	1,227	0,0888	$0,355 \cdot 10^{-3}$
Fe + Al	4 + 10	61,38	1,266		
		für Al allein:	1,288	0,1099	$0,74 \cdot 10^{-3}$

Die benutzten Materialien wurden bei verschiedenen Schichtdicken untersucht. Die gemessenen Intensitäten sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Intensität hinter zusätzlichem Absorber (Spalte 3) wurde nach dem in § 4 erklärten Verfahren bestimmt. Neben dieser Angabe in Volt · cm steht dieselbe Intensität in J, diese dürfte auf 2 bis 3 mJ sicher bestimmt sein. Die letzte Spalte gibt die logarithmischen Neigungen der Intensitätskurven an. Die Quecksilbermessung ist noch auf allseitigen Einfall umzurechnen. Es wurde durch seitliche und allseitige Abschirmung mit derselben Bleidicke festgestellt, daß 76% der absorbierten Intensität von der Deckplatte verschluckt werden. Aus der Bleiabsorptionskurve (Tabelle 3, Fig. 6) ist zu entnehmen, daß 4 cm Blei allseitig gepackt

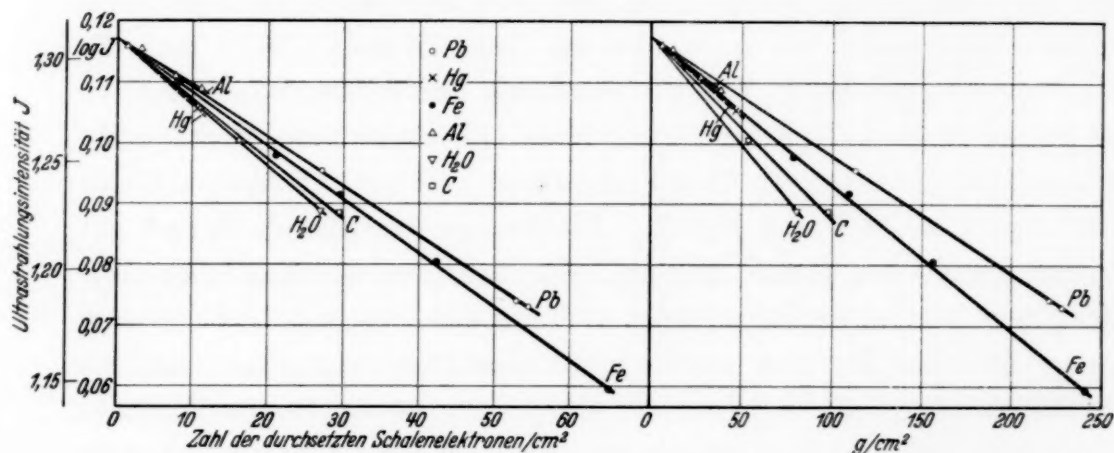


Fig. 6. Die Schwächung der Ultrastrahlung durch verschiedene Materialien.

1,3 Volt · cm fortnehmen. Das an Stelle der oberen 4 cm dicken Bleideckplatte gelegte Quecksilber nimmt 0,29 Volt · cm mehr fort. Bei allseitig gepacktem Quecksilber würde also die Mehrabsorption gegenüber Blei $\frac{0,29 \cdot 100}{76} = 0,38$ Volt · cm betragen, so daß die gesamte vom Quecksilber

bei allseitiger Abschirmung verschluckte Intensität 1,68 Volt · cm sein dürfte. In Fig. 6 sind die gemessenen Intensitätswerte in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Als Abszisse ist in dem linken Teil die Zahl der Schalelektronen pro Quadratzentimeter gewählt. In dem rechten Teil sind Schichten gleicher Massen einander gleich gesetzt. Wäre für die Schwächung der Gehalt an Schalelektronen allein maßgebend, so müßten im linken Teil der Figur alle Meßpunkte auf einer Geraden liegen. Dasselbe wäre im rechten Teil der Fall, wenn sich auch die Kernelektronen, so wie es Jeans und Regener¹⁾ vermutet haben, in gleicher Weise wie die Schalen-

¹⁾ J. H. Jeans, Nature **127**, 945, 1931; **128**, 301, 1931; E. Regener, ZS. f. Phys. **74**, 433, 1932; Phys. ZS. **34**, 306, 1933.

elektronen an der Schwächung beteiligen würden. Keine dieser wird in der Ultrastrahlung bisher üblichen Umrechnungen durch das Experiment bestätigt. Wenn sich auch bei Auftragung nach Schalenelektronendichten die Intensitätskurven sehr eng zusammenziehen, so ist doch mit einigen Ausnahmen eine systematische Abnahme der Neigungen mit wachsender Ordnungszahl zu erkennen, die außerhalb der Meßgenauigkeit liegt, da die mittleren Fehler der Neigungen bei allen Stoffen mit Ausnahme von Quecksilber und Aluminium nur 1 bis 2% betragen. Auf Grund neuerer theoretischer Überlegungen läßt sich solch ein Effekt bei einer Strahlung geladener Korpuskeln erklären. Die nähere Diskussion erfolgt in 8.

Zur Kontrolle, ob nicht durch ausgelöste Sekundärstrahlung größerer Härte das Meßergebnis beeinflußt worden ist und ob die Übergangseffekte wirklich ausgeschaltet waren, wurden um das 16,5 cm Pb-Filter 4 cm Fe und 10 cm Al gepackt, so daß die Strahlung der Reihe nach 10 cm Al, 4 cm Fe und 16,5 cm Pb zu durchsetzen hatte. Bei zusätzlicher Abschirmung mit 4 cm Fe allein wurden 22 mJ absorbiert. 10 cm Al allein nahmen 20 mJ fort (Tabelle 3 und Fig. 6). Die Summe von 42 mJ stimmt gut mit den gemessenen 44 mJ überein. Die von den einzelnen Absorberschichten verschluckten Intensitäten addieren sich, was nicht zu erwarten wäre, wenn eine aus dem außen herumgepackten Absorber ausgelöste Sekundärstrahlung, die in bezug auf Härte und Intensität vom Material abhängt, das innere Filter durchdringen würde. Wenn die Annahme richtig ist, daß diese Sekundärstrahlung bei der benutzten Versuchsanordnung ausgeschaltet war, so müßte sich derselbe logarithmische Intensitätsabfall auch unter Verwendung eines Filters aus anderem Material ergeben. Um dieses zu prüfen, wurde das 16,5 cm Pb-Filter durch ein 20 cm Fe-Filter

Tabelle 4. Die Absorption der Ultrastrahlung in verschiedenen Materialien. Innenfilter 20 cm Fe.

1	2	3	4	5	6
Material <i>M</i>	Schicht- dicke <i>D</i> cm	Intensität hinter Absorber		$\log J$	$\alpha = - \frac{d \log J}{d h}$
		V · cm in 113,53'	<i>J</i>		
Nullwert (hinter 20 cm Fe . . .		64,55	1,331	0,1242	
Pb {	10	61,06	1,259	0,1000	} $2,30 \cdot 10^{-3}$
	20	58,20	1,200	0,0792	
Fe {	10	61,50	1,268	0,1031	} $1,91 \cdot 10^{-3}$
	20	59,34	1,224	0,0878	
Al	10	63,40	1,307	0,1163	$0,79 \cdot 10^{-3}$

ersetzt. Untersucht wurden die Absorption durch Blei, Eisen und Aluminium. In Tabelle 4 ist das Meßergebnis in derselben Weise wie im Falle des 16,5 cm Pb-Filters dargestellt (Tabelle 4). Für die Ausdrücke $d \log J/dh$ wurden bei Pb und Fe innerhalb der geschätzten Meßgenauigkeit dieselben Werte erhalten. Es ist also auch hier kein Einfluß störender Sekundärstrahlung zu erkennen. Die großen Unterschiede bei Al sind durch die zu geringe Meßgenauigkeit (zu wenig Material) bedingt.

Aus den logarithmischen Neigungen der Intensitätskurven lassen sich äquivalente Schichtdicken bestimmen (Tabelle 5). Unter Berücksichtigung der größeren Genauigkeit der bei Benutzung des 16,5 cm Pb-Filters ausgeführten Messungen wurde über die logarithmischen Neigungen der beiden mit verschiedenen Filtern durchgeführten Meßreihen gemittelt (Tabelle 5, Spalte 9 bis 12). Beim Aluminium wurden hierzu auch die Messungen bei gleichzeitiger Abschirmung mit 4 cm Fe und 10 cm Al hinzugezogen. Die Absorption in 4 cm Fe ist aus der Fe-Kurve (Tabelle 3 und Fig. 6) recht genau bekannt. Es ergibt sich so, daß 10 cm Al 22 mJ absorbieren. Die weitere Bestimmung von $d \log J/dh$ für Al hieraus ist in Tabelle 6 angegeben. Die Ver-

Tabelle 5. Äquivalente Dicken und Massen verschiedener Materialien.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ma- terial	Ord- nungs- zahl	Atom- ge- wicht	Spez. Gewicht	$a = \frac{Z}{A} \cdot S$	Dichte der Schalen- elektronen	Äquivalente Dicken, berechnet nach dem Gehalt an		$\alpha = \frac{d \log J}{dh}$ bei Filterung mit			Mittel- wert	Beob- achtete äqui- valente Dicken	Beob- achtete äqui- valente Massen
<i>M</i>	<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>S</i>			Gesamt- elek- tronen S_{Pb}/SM	Schalen- elek- tronen a_{Pb}/a_M	16,5 cm Pb	16,5 cm Pb + 4 cm Fe	20 cm Fe		$\frac{\alpha_{Pb}}{\alpha_M}$	$\frac{\alpha_{Pb}}{\alpha_M} \cdot \frac{SM}{SPb}$
Pb	82	207,2	11,4	4,50	$2,73 \cdot 10^{24}$	1,00	1,00	$2,23 \cdot 10^{-3}$		$2,30 \cdot 10^{-3}$	$2,26 \cdot 10^{-3}$	1,00	1,00
Hg	80	200,6	13,6	5,27	3,2	0,84	0,85	3,5			3,5	0,65	0,76
Fe	26	55,8	7,5	3,50	2,12	1,52	1,29	1,88		1,91	1,89	1,20	0,78
Al	13	27	2,7	1,30	0,79	4,22	3,46	0,61	$0,74 \cdot 10^{-3}$	0,79	0,69	3,3	0,78
H ₂ O	10	18	1,00	0,555	0,337	11,4	8,11	0,355			0,355	6,4	0,55
C	6	12	1,15 (1,24)	0,575	0,349	9,99	7,82	0,348			0,348	6,5	0,65

hältnisse äquivalenter Dicken lassen sich aus den $d \log J/dh$ ohne weiteres bestimmen und sind in Spalte 13 auf Blei bezogen. Zum Vergleich sind in Spalte 7 und 8 Verhältnisse äquivalenter Schichten gegenübergestellt, die einmal unter Berücksichtigung des Schalenelektronengehaltes, das andere Mal unter Einbeziehung auch der Kernelektronen berechnet sind. Hier kommt noch einmal das zahlenmäßig zum Ausdruck, was schon aus Fig. 6 ersichtlich war, daß die Schwächung pro Elektron bei Stoffen geringerer Ordnungszahl erheblich stärker ist. Bei Stoffen mit nicht wohl definiertem spezifischen Gewicht (z. B. Kohle) ist die Angabe äquivalenter Schichten nicht sehr sinnvoll. Es ist daher zweckmäßiger, auch bei allen Stoffen noch die in bezug auf Schwächung äquivalenten Massen anzugeben (Spalte 14), weil diese Angabe unabhängig davon ist, welche Dichte der vorliegende Absorber gerade hat. Bei gleichmäßiger Streuung an Schalen- und Kernelektronen hätten alle Zahlen in Spalte 14 gleich 1 sein müssen. Die Messungen zeigen hiervon sehr starke Abweichungen. Die nähere Diskussion hierüber erfolgt in 8.

6. *Bestimmung des Absorptionskoeffizienten.* Im folgenden sollen aus dem gemessenen Intensitätsabfall die Absorptionskoeffizienten der Strahlung bestimmt werden (auf senkrechten Einfall umgerechnet). Über den Verlauf der Absorptionsfunktion selber läßt sich aus meinen Messungen nichts aussagen, da selbst bei großen Schichtdicken nur ein geringer Bruchteil der Intensität absorbiert wird, so daß jede Absorptionsfunktion in dem schmalen Bereich als gerade Linie erscheint. (Siehe auch 7 und Fig. 7.)

Die im Weltenraum aus jeder Richtung mit gleicher Intensität einfallende Strahlung hat der Reihe nach die Atmosphäre, Decken und Wände des Institutsgebäudes und die eigentliche Panzerung in Hohlwürfelform zu durchsetzen. Der Einfachheit wegen sei die Atmosphäre als planparallele Platte, das Institutsgebäude wegen des Gewölbes als Halbkugelschale und die Ionisationskammer als punktförmig angesehen. Die Intensität würde sich dann wie folgt ausdrücken:

$$J = 8 J_0 \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\cos \varphi}} e^{-\frac{\mu_a h_a + \mu_b h_b}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta + \int_{\operatorname{arctg} \frac{1}{\cos \varphi}}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} - \frac{\mu_b h_b}{\sin \vartheta \cos \varphi}} \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi. \quad (1)$$

J_0 sei die im Einheitswinkel einfallende Intensität, wenn die Strahlung nur durch die nicht variierten halbkugelförmigen Absorptionsteile (Institutsgebäude und innerer Teil des 16,5 cm Pb-Panzers) geschwächt worden wäre. μ und h seien Absorptionskoeffizienten und Dicke der übrigen Absorber, bei Luft sei hierunter der Druck, gemessen in cm Hg, verstanden. Der Index a beziehe sich auf Luft, der Index b auf die jeweilige Panzerung. φ bedeute das Azimut und ϑ die Zenitdistanz. Der erste Summand in Gleichung (1) gibt die durch die Deckplatte, der zweite die durch die Seitenwände einfallende Intensität an. Genähert kann die Integrationsgrenze $\arctg 1/\cos \varphi$ durch einen konstanten Winkel ψ ersetzt werden. Eine Reihenentwicklung von (1) nach fortschreitenden Potenzen von $\mu_b h_b$ führt zu dem Ausdruck:

$$J = J_0 \left[2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\mu_b h_b)^r}{r!} \left\{ 2\pi \int_0^{\psi} \frac{1}{\cos^r \vartheta} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta + 8 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^r \varphi} d\varphi \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^r \vartheta} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} d\vartheta \right\} \right]. \quad (2)$$

Die logarithmischen Ableitungen nach h_a und h_b ergeben bei Vernachlässigung der Glieder höherer als erster Ordnung von $\mu_b h_b$ und der Ausdrücke mit $\partial \mu_a / \partial h_{a,b}$ und $\partial \mu_b / \partial h_{a,b}$:

$$\frac{\partial \ln J}{\partial h_a} = -\mu_a \frac{\int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta - \mu_b h_b \left\{ \int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta + 1,1222 \int_{\psi}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta \right\}}{\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta - \mu_b h_b \left\{ \int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta + 1,1222 \int_{\psi}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} d\vartheta \right\}}, \quad (3)$$

$$= -\mu_b \frac{\frac{\partial \ln J}{\partial h_b} \left\{ \int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta + 1,1222 \int_{\psi}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} d\vartheta - \mu_b h_b \left\{ \int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta + 1,2732 \int_{\psi}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \right\} \right\}}{\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta - \mu_b h_b \left\{ \int_0^{\psi} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta + 1,1222 \int_{\psi}^{\pi/2} e^{-\frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta}} d\vartheta \right\}}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial h_b} = -\mu_b \cdot f(\mu_a h_a, \mu_b h_b). \quad (4a)$$

In Gleichung (3) steht links der aus Messungen bestimmte Barometereffekt. Die rechte Seite läßt sich unter Einführung einiger Abkürzungen weiter vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln J}{\partial h_a} &= -\mu_a \frac{-Ei(-\mu_a h_a) - \mu_b h_b \cdot \alpha(\mu_a h_a)}{\Phi(\mu_a h_a) - \mu_b h_b \cdot \beta(\mu_a h_a)}, \\ \frac{\partial \ln J}{\partial h_a} &= -\mu_a \left(\frac{-Ei}{\Phi} - \mu_b h_b \frac{\alpha + \beta \cdot Ei/\Phi}{\Phi + \mu_b h_b \cdot \beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Der erste Bruch von Gleichung (3a) stellt den Anteil einer halbkugelförmigen Panzerung dar. Der zweite Ausdruck ist die Korrektur für den Würfel,

$$^1) \quad \Phi(\mu h) = e^{-\mu h} + \mu h \cdot Ei(-\mu h),$$

$$Ei(-\mu h) = \int_{\infty}^{\mu h} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Tabellen Jahnke-Emde
Funktionentafel S. 21.

Tabelle 6 gibt den Wert $h \frac{d \ln J}{d h}$ als Funktion von μh wieder. Sie läßt sich zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten benutzen.

Tabelle 6.

μh	$h \frac{d \ln J}{d h}$	μh	$h \frac{d \ln J}{d h}$	μh	$h \frac{d \ln J}{d h}$	$h \mu$	$h \frac{d \ln J}{d h}$
0,00	— 0,0000	0,60	0,987	2,2	2,82	4,2	4,95
0,01	0,0425	0,65	1,051	2,3	2,93	4,3	5,05
0,02	0,0735	0,70	1,114	2,4	3,04	4,4	5,13
0,03	0,1007	0,75	1,176	2,5	3,15	4,5	5,29
0,04	0,1256	0,80	1,237	2,6	3,26	4,6	5,36
0,05	0,149	0,85	1,298	2,7	3,36	4,7	5,45
0,06	0,171	0,90	1,357	2,8	3,47	4,8	5,55
0,07	0,193	0,95	1,418	2,9	3,57	4,9	5,65
0,08	0,213	1,00	1,478	3,0	3,67	5,0	5,75
0,09	0,233	1,1	1,595	3,1	3,78	6	6,80
0,10	0,252	1,2	1,711	3,2	3,89	7	7,83
0,15	0,396	1,3	1,82	3,3	3,99	8	8,85
0,20	0,426	1,4	1,94	3,4	4,10	9	9,87
0,25	0,504	1,5	2,08	3,5	4,16	10	10,88
0,30	0,579	1,6	2,17	3,6	4,31	11	11,8
0,35	0,652	1,7	2,28	3,7	4,41	12	12,9
0,40	0,722	1,8	2,39	3,8	4,52	13	13,9
0,45	0,790	1,9	2,50	3,9	4,63	14	14,9
0,50	0,857	2,0	2,61	4,0	4,73	15	15,9
0,55	0,923	2,1	2,71	4,1	4,83		

Beispiel: Es wird bei 760 mm Luftdruck ein Barometereffekt von 2,00%/cm Hg beobachtet. Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten für Luft hat man den Ausdruck $h \frac{d \ln J}{d h} = 0,02 \cdot 76 = 1,52$ zu bilden. Aus der Tabelle ergibt sich $\mu h = 1,04$. Zur Bestimmung des Massenabsorptionskoeffizienten ist dieser Wert durch die Luftmasse pro cm² zu dividieren:

$$\frac{\mu}{s} = \frac{1,04}{76 \cdot 13,6} = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}.$$

doch beträgt dieses Glied für die in Betracht kommenden Werte etwa nur $10/100$ des ersten Bruches, so daß es vernachlässigt werden kann. Auf der linken Seite von Gleichung (4) steht die experimentell bestimmte logarithmische Neigung. Der Absorptionskoeffizient μ_b läßt sich durch schrittweise Annäherung in der Weise bestimmen, daß der rechts als Faktor auftretende Bruch, der sehr wenig von $\mu_b h_b$ abhängt, zuerst mit einem geschätzten $\mu_b h_b$ berechnet wird. Dieses Verfahren konvergiert außerordentlich schnell. Die Zahlenwerte der Integrale sind für den in Frage kommenden Bereich in Tabelle 7 zusammengestellt, wobei $\psi = 50^\circ$ gesetzt ist, wie sich geometrisch aus dem Panzeraufbau ergibt. Der Wert der Funktion f aus Gleichung (4a) ist ebenfalls (für $\mu_b h_b = 0,08$) dort angeführt (Tabelle 7).

Tabelle 7.

$\mu_a h_a$	$\Phi(\mu_a h_a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta$	$\int_0^{50^\circ} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} d\vartheta$	$\int_0^{50^\circ} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\mu_a h_a}{\cos \vartheta} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta}$	f
0,70	0,234 95	0,1844	0,0985	0,2286	0,113	1,254 ₄
0,90	0,172 40	0,1440	0,0627	0,1778	0,075	1,239 ₉
0,95	0,159 94	0,1354	0,0564	0,1670	0,067	1,239 ₄
1,00	0,148 50	0,1273	0,0508	0,1568	0,059	1,239 ₂

Tabelle 8. Der Absorptionskoeffizient für Luft.

Restgang J	Abschirmung 8 cm Pb-Äqu. des Gebäudes +	$-\frac{d \ln J}{d h}$	$\mu_a h_a$	Absorptions- koeffizient pro cm Hg-Äqu. $\mu_a / \text{cm Hg-Äqu.}$	Massen- absorptions- koeffizient $\mu_a / \text{g Luft}$
0,302	14,7 cm Pb	2,00	1,04	$13,7 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$
	16,5 " Pb	1,75	0,88	11,6	0,85
	20 " Fe	1,53	0,79	10,4	0,76
	16,5 " Pb	1,73	0,87	11,4	0,84
0,100	14,7 cm Pb	1,74	0,87	11,4	0,84
	16,5 " Pb	1,52	0,79	10,4	0,76
	20 " Fe	1,33	0,62	8,2	0,60
	16,5 " Pb	1,50	0,72	9,5	0,70
Messerschmidt	20 cm Pb	1,04	0,47	6,2	0,46

Aus den durch Messungen bestimmten Daten lassen sich unter der Anwendung der soeben abgeleiteten Formeln die Absorptionskoeffizienten numerisch berechnen. In Tabelle 8 sind die aus dem Barometereffekt (Tabelle 1) nach Gleichung (3a) bestimmten Absorptionskoeffizienten angegeben. Zum Vergleich ist der von Messerschmidt¹⁾ in Halle gemessene Barometereffekt herangezogen. Auffallend ist, daß dieser merkwürdig tief liegt. Der BE, bezogen auf die Ultrastrahlungsintensität, hängt noch von der Größe des abgezogenen Restganges ab. Dieser Restgang konnte bei mir nur durch Vergleich mit ähnlichen Apparaten (z. B. Steinke 0,2 J) geschätzt werden. Wird bei meinen Messungen als Extremfall die Eigenionisation der Kammer gleich Null gesetzt, so daß von der gemessenen Intensität nur die 0,1 J der aus dem Betonsockel stammenden Strahlung abzuziehen sind, so ergibt sich eine untere Schranke des BE und des Absorptionskoeffizienten (Tabelle 8, unterer Teil). Der Messerschmidtsche Wert liegt noch weit darunter. Wodurch dieser Unterschied verursacht ist, läßt sich nicht sagen.

Die Absorptionskoeffizienten der übrigen Stoffe ergeben sich aus den experimentell bestimmten logarithmischen Neigungen der Absorptionskurven durch Division mit dem Faktor f [Gleichung (4a)]. In Tabelle 9 sind in Spalte 4 die Absorptionskoeffizienten pro Zentimeter Schichtdicke und in Spalte 5 die Massenabsorptionskoeffizienten angegeben. Aus letzteren wurde weiter in Tabelle 10 der Absorptionskoeffizient für ein Atom, für ein Elektron der Gesamtzahl mit Einbeziehung der Kernelektronen und außerdem für ein Schalelektron bestimmt (Tabelle 10). Hinter der zugehörigen Spalte ist jedesmal die relative Schwächung pro Elektron angegeben, wobei μ_e (Pb) gleich 1 gesetzt ist. Wie aus der Tabelle

Tabelle 9. Der Absorptionskoeffizient für verschiedene Materialien.

1	2	3	4	5
Material	$\alpha = - \frac{d \log J}{d h}$	Spez. Gewicht	Absorptionskoeffizient pro cm Schichtdicke	Massenabsorptionskoeffizient
M		S	$\mu/\text{cm}_M = \frac{d \ln J}{d h} / f$	μ/S
Pb	$2,26 \cdot 10^{-3}$	11,4	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$0,368 \cdot 10^{-3}$
Hg	3,5	13,6	6,5	0,477
Fe	1,89	7,5	3,51	0,468
Al	0,69	2,7	1,28	0,474
H ₂ O	0,355	1,00	0,659	0,659
C	0,348	1,15	0,646	0,562

¹⁾ W. Messerschmidt, ZS. f. Phys. 78, 668, 1932.

Tabelle 10.

Der atomare Absorptionskoeffizient für verschiedene Materialien.

Ma- terial <i>M</i>	Massen- absorptions- koeffizient μ/S	Absorptionskoeffizient				
		pro Atom $b = \frac{\mu \cdot A}{S \cdot N}^*)$	pro Elektron der Gesamtzahl		pro Schalenelektron	
			$\mu'_e = b/A$	$\mu_e(M)/\mu'_e(\text{Pb})$	$\mu_e = b/Z$	$\mu_e(M)/\mu_e(\text{Pb})$
Pb	$0,368 \cdot 10^{-3}$	$12,56 \cdot 10^{-26}$	$0,0606 \cdot 10^{-26}$	1,00	$0,153 \cdot 10^{-26}$	1,00
Hg	0,477	15,8	0,0787	1,30	0,198	1,29
Fe	0,468	4,31	0,0772	1,27	0,166	1,08
Al	0,474	2,11	0,0781	1,29	0,162	1,06
H ² O	0,659	1,96	0,1088	1,79	0,196	1,28
Luft	0,84	3,99	0,139	2,28	0,274	1,79
C	0,562	1,113	0,0927	1,53	0,186	1,21

ersichtlich, folgen aus meinen Messungen erhebliche Unterschiede in den Absorptionskoeffizienten pro Schalenelektron. Die relative Schwächung pro Schalenelektron wird noch in Abschnitt 8 (Fig. 9) mit theoretisch berechneten Werten verglichen.

Es soll noch die Frage beantwortet werden, welchen Einfluß auf die Absolutwerte der Absorptionskoeffizienten ein Fehler bei der Restgangsabschätzung hat. Zur Lösung des ursprünglichen Problems, äquivalente Schichtdicken zu bestimmen, braucht dieser Wert nicht bekannt zu sein. Durch Abzug eines falschen Wertes sei die Ultrastrahlungsintensität J mit einem Fehler Δ behaftet. Der natürliche Logarithmus der Intensität ist dann:

$$\ln(J + \Delta) = \ln\left[J\left(1 + \frac{\Delta}{J}\right)\right].$$

Eine Reihenentwicklung nach fortschreitenden Potenzen von Δ/J ergibt:

$$\ln(J + \Delta) = \ln J + \frac{\Delta}{J} - \frac{\Delta^2}{2J^2} \pm \dots$$

Jede Bestimmung der Absorptionskoeffizienten läuft in erster Näherung auf eine Multiplikation der Neigung der logarithmischen Intensitätskurven mit irgendeinem Faktor hinaus:

$$\frac{d \ln(J + \Delta)}{d h} = \frac{d \ln J}{d h} \left[1 - \frac{\Delta}{J} + \left(\frac{\Delta}{J}\right)^2 \mp \dots\right].$$

Ist der Fehler Δ klein gegen die Ultrastrahlungsintensität, so können die Glieder von höherer als erster Ordnung vernachlässigt werden. Die von den gemessenen Intensitätswerten abgezogene nicht durch die Ultrastrahlung verursachte Ionisation von $0,30 J$ könnte um $\pm 0,050 J$ ungenau sein, so daß durch Abzug des nicht genau bekannten Restganges eine Ungenauigkeit

*) $N = 6,07 \cdot 10^{23}$ ist die Zahl der Atome im Mol.

der Absolutwerte der Absorptionskoeffizienten von 4% verursacht wird. Berücksichtigt man noch die durch Meßfehler bei den Absorptionskurven verursachte Ungenauigkeit, die bei den meisten Stoffen 1 bis 2% betragen dürfte, so sind die Absolutwerte der Absorptionskoeffizienten bis auf etwa 4 bis 5% genau bestimmt.

7. *Vergleich mit den Messungen anderer Autoren.* Die ersten planmäßigen Untersuchungen über das Verhalten verschiedener Stoffe gegenüber der Ultrastrahlung wurden von Hoffmann¹⁾ in Angriff genommen. Bei genügend großen Schichtdicken, bei denen das Gebiet der Übergangseffekte überschritten war, fand er eine Absorption nach der Dichte der Schalenelektronen. Auch Myssowsky und Tuwim²⁾ bestätigten die Hoffmannschen Ergebnisse. Ebenso glaubte neuerdings auch Tuwim³⁾ eine Absorption nach der Schalenelektronendichte aus Zählrohrmessungen schließen zu können. Er fand, daß die Entladungen eines Zählrohres proportional der Schalenelektronendichte des Füllgases seien, also durch eine Strahlung verursacht werden, die durch die Schalelektronen geschwächt wird. Man kann aber dagegen einwenden, daß dieses keineswegs die primäre Strahlung sein muß, wie es Tuwim annahm, sondern vielmehr eine in der Umgebung entstandene Elektronenstrahlung sein kann. Schindler⁴⁾ dagegen, der sich allerdings hauptsächlich mit den Übergangseffekten beschäftigte, wies darauf hin, daß aus seinen Messungen bei großen Absorberdicken eine stärkere Absorption der Primärstrahlung in Eisen als in Blei folgen würde, wenn er Eisen und Blei nach der Schalenelektronendichte umrechnete⁵⁾. Kolhörster und Tuwim⁶⁾ vergleichen den von Hoffmann und Lindholm⁷⁾ im Gebirge gemessenen Barometereffekt ($BE = 4,0\%/cm\ Hg$) mit den in gleicher Höhe ausgeführten Wasserversenkmessungen von Millikan und Cameron⁸⁾ und finden bei Umrechnung nach Schalenelektronendichte Übereinstimmung. Ein solcher Vergleich von gemessenem und berechnetem BE dürfte sich jedoch nur sehr unsicher durchführen lassen. Kolhörster und Tuwim berechnen ja auch für denselben Höhenbereich (2000 bis 3000 m) den aus Kolhörsters alten Ballonfahrten bestimmten BE zu $6,5\%/cm\ Hg$. Die Apparatur war dabei ebenso ungepanzert wie bei den Wasserversenkmessungen von Millikan und Cameron, aus denen sie einen BE von nur $4,0\%/cm\ Hg$ errechnen. Meine Messungen zeigen, daß

¹⁾ G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **82**, 413, 1927. — ²⁾ L. Myssowsky u. L. Tuwim, ZS. f. Phys. **44**, 369, 1927. — ³⁾ L. Tuwim, C. R. **197**, 79, 1933. — ⁴⁾ H. Schindler, ZS. f. Phys. **72**, 625, 1931. — ⁵⁾ Allerdings lag dieses an der Grenze seiner Meßgenauigkeit. — ⁶⁾ W. Kolhörster u. L. Tuwim, Erg. d. kosm. Phys. **1**, 87, 1931. — ⁷⁾ F. Lindholm, Gerlands Beitr. **26**, 416, 1930. — ⁸⁾ R. A. Millikan u. G. H. Cameron, Phys. Rev. **37**, 235, 1931.

Schichten gleichen Schalenelektronengehalts nur in erster Näherung einander äquivalent gesetzt werden dürfen. Genauer zeigt sich aber bei einer solchen Umrechnung eine stärkere Absorption bei Elementen geringerer Ordnungszahl.

Merkwürdig an meinen Ergebnissen ist die aus dem BE ($1,74\%/cm\ Hg$) errechnete außerordentlich starke Absorption in Luft. Auf den Unterschied gegenüber dem von Messerschmidt gefundenen bedeutend geringeren Wert ($BE = 1,04\%/cm\ Hg$) wurde schon hingewiesen. Es ist aber vielleicht nicht unwichtig, hierzu zu bemerken, daß auch bei Abschirmung mit 10 cm Bleiäquivalent alle neueren Messungen in Königsberg immer einen höheren Barometereffekt zeigen, als die früheren Registrierungen von Hoffmann¹⁾ in Königsberg und die neueren von Pforte und Messerschmidt²⁾ in Halle³⁾. Die Unterschiede in den Barometereffekten können von hieraus nicht geklärt werden. Ebenso muß zunächst noch dahingestellt bleiben, ob die Berechnung des Absorptionskoeffizienten daraus restlos berechtigt ist, d. h. ob der Barometereffekt als reiner Absorptionseffekt zu deuten ist. Dagegen sprechen vielleicht die starken Schwankungen des BE, wie sie besonders bei geringer Abschirmung auftreten.

Von Wasser ist der Absorptionskoeffizient aus den Versenkmessungen in Seen bestimmt worden. Millikan und Cameron⁴⁾ finden in dem in Frage kommenden Bereich $\mu = 0,67 \cdot 10^{-3}$, Steinke⁵⁾ $\mu = 0,66 \cdot 10^{-3}\ cm\ H_2O$. In letzter Zeit sind sehr genaue Versenkmessungen von Regener und Kramer⁶⁾ ausgeführt. Den scheinbaren Absorptionskoeffizienten des Strahlengemisches ohne Komponentenzerlegung nach Kramer gibt Fig. 7 in Abhängigkeit von der Wassertiefe wieder. Berücksichtigt man die zusätzliche Abschirmung meiner Apparatur gegenüber der Kramerschen (5,5 cm Hg Luftdruckunterschied, Gebäude von 8 cm Pb-Äquivalent und

¹⁾ G. Hoffmann u. L. Lindholm, Gerlands Beitr. **20**, 12, 1928.
 — ²⁾ W. S. Pforte, ZS. f. Phys. **72**, 511, 1931; W. Messerschmidt u. W. S. Pforte, ebenda **73**, 677, 1932; W. Messerschmidt, ebenda **78**, 668, 1932.
 — ³⁾ G. Hoffmann findet 1927 einen BE von $1,25\%/cm\ Hg$ [bei Berücksichtigung, daß der Restgang nicht $0,20\ J$, wie zuerst angegeben, sondern wesentlich kleiner (etwa $0,03\ J$) ist], Pforte 1931 einen von $1,25\%/cm\ Hg$. 1932 dagegen beobachten Pforte und Messerschmidt einen BE von $1,78\%/cm\ Hg$, und im selben Jahre gibt Messerschmidt seinen Wert zu $1,84\%/cm\ Hg$ an. Während des Jahres 1929 konnte dagegen Steinke (ZS. f. Phys. **64**, 48, 1930) hinter 12 cm Eisen einen mittleren BE von $2\%/cm\ Hg$ beobachten. Die in den letzten Jahren mit einer Steinke-Standard-Apparatur durchgeführten Dauerregistrierungen (noch nicht veröffentlicht) liefern einen ebenso großen Wert. — ⁴⁾ R. A. Millikan u. G. H. Cameron, Phys. Rev. **37**, 235, 1931. — ⁵⁾ E. G. Steinke, ZS. f. Phys. **58**, 183, 1929. — ⁶⁾ E. Regener, Phys. ZS. **34**, 306, 1933; W. Kramer, ZS. f. Phys. **85**, 411, 1933.

16,5 cm Pb-Panzer), so ergibt sich, daß von etwa 2,50 bis 4,00 m Versenktiefe bei Kramer derselbe Energiebereich der Ultrastrahlung wirksam sein sollte wie bei meinen Messungen. Die Übereinstimmung

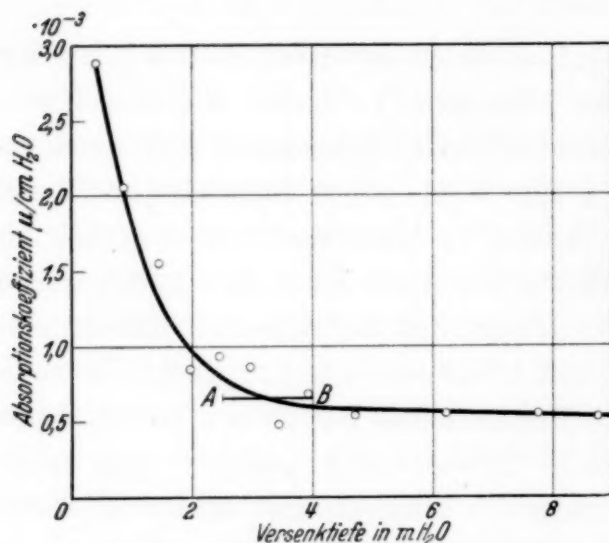


Fig. 7. Der scheinbare Absorptionskoeffizient nach Kramer. *AB* gibt den vom Verfasser bestimmten Absorptionskoeffizienten und den Arbeitsbereich an.

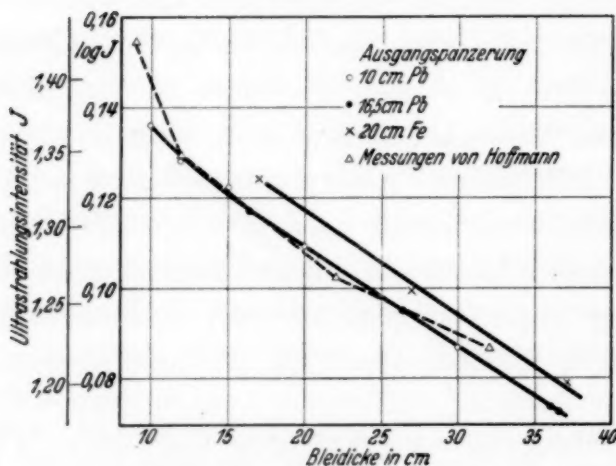


Fig. 8. Bleiabsorptionskurven. Der von Hoffmann angegebene Intensitätsverlauf ist gestrichelt gezeichnet.

hier nur die Neigungen der Intensitätskurven interessieren. Die Hoffmannschen Werte passen sich recht gut meinen Intensitätskurven an, wenn man ihre Fehlergrenzen berücksichtigt. Der von Hoffmann an-

gemessenen mit anderen Materialien ist die von Hoffmann¹⁾ aufgenommene Bleikurve besonders interessant, weil seine Untersuchungen genau an derselben Stelle ausgeführt wurden, an der meine Apparatur stand. In Fig. 8 sind in logarithmischem Maßstab die früher aufgenommenen drei Bleiabsorptionskurven zusammen mit der Hoffmannschen eingezeichnet, die dabei willkürlich nach oben verschoben ist²⁾, da

Von den Absorptionsmessungen mit anderen Materialien ist die von Hoffmann¹⁾ aufgenommene Bleikurve besonders interessant, weil seine Untersuchungen genau an derselben Stelle ausgeführt wurden, an der meine Apparatur stand. In Fig. 8 sind in logarithmischem Maßstab die früher aufgenommenen drei Bleiabsorptionskurven zusammen mit der Hoffmannschen eingezeichnet, die dabei willkürlich nach oben verschoben ist²⁾, da

¹⁾ G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **82**, 413, 1927. — ²⁾ Die Verschiebung entspricht einer Multiplikation der Hoffmannschen Intensitätswerte mit dem Faktor 1,38, der etwa dem Verhältnis der Eveschen Zahlen bei der Hoffmannschen und bei meiner Apparatur entspricht.

gegebene Absorptionskoeffizient $\mu = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm Pb}$ stimmt aber nur zufällig mit dem von mir bestimmten überein, weil einerseits die Korrektur wegen des würfelförmigen Panzeraufbaues (6) nicht berücksichtigt ist, andererseits aus den beiden letzten Punkten eine zu geringe Neigung bestimmt wurde. Beide Fehler heben sich gerade auf. Alle meine Bleiabsorptionskurven zeigen innerhalb der Meßgenauigkeit dieselbe logarithmische Neigung, obwohl der Panzeraufbau jedesmal verschieden war. Die größeren Intensitäten der Bleikurve bei Verwendung des 20 cm Fe-Filters sind durch die veränderte Sekundärstrahlung bedingt, die hinter genügend dicken Schichten bei Eisen eine größere Intensität als bei Blei hat. Steinke¹⁾ hat mit einer Ionisationskammer die innerhalb eines Kreises mit dem Radius 33° um den Zenit einfallende Strahlung mit Bleischichten bis zu 60 cm Blei untersucht und $\mu = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm Pb}$ gefunden. Rossi²⁾ findet dagegen mit einer Zählrohrapparatur $\mu = 6 \cdot 10^{-3} \text{ cm Pb}$. Der wesentlich höhere Wert könnte entweder durch die weichen Bestandteile der senkrecht einfallenden Strahlung oder auch durch die andere Apparatur bedingt sein.

8. *Vergleich mit Theorien über Absorption der Ultrastrahlung.* Für einen Teil der Ultrastrahlung ist durch die Entdeckung des geomagnetischen Breiteneffektes der Nachweis einer geladenen Korpuskularstrahlung erbracht. Ihre Energie würde etwa $10^{10} \text{ e-Volt}^3)$ betragen. Der Energiebereich, in dem die Bestimmung äquivalenter Schichtdicken durchgeführt wurde, müßte, da für ihn ein Breiteneffekt nicht mehr auftreten dürfte⁴⁾, aus geladenen Teilchen von mehr als 10^{10} e-Volt Energie bestehen. Es könnte sich aber auch um eine im Erdfeld nicht ablenkbare Korpuskularstrahlung handeln oder überhaupt um γ -Quanten. Deshalb müssen hier alle Möglichkeiten erörtert werden. Bei einer reinen Wellennatur der Ultrastrahlung würde Schwächung durch Compton-Prozesse an den Elektronen stattfinden. Sieht man zunächst von einer Beeinflussung des Atomkerns durch die Strahlung ab, so wären Schichten gleichen Schalenelektronengehaltes einander äquivalent, was nach meinen Messungen aber nur in erster Näherung erfüllt ist. Betrachtet man aber auch die Kernelektronen als frei und in gleicher Weise an der Streuung beteiligt, so wären Schichten gleicher Masse einander äquivalent. Diese Annahme von Jeans und Regener kann, wie schon erwähnt, in keiner Weise durch meine Messungen gestützt werden. Bei dieser Auffassung der Ultrastrahlung als

¹⁾ E. G. Steinke, ZS. f. Phys. **42**, 570, 1927. — ²⁾ B. Rossi, ZS. f. Phys. **82**, 151, 1933. — ³⁾ A. H. Compton, Phys. Rev. **43**, 387, 1933. —

⁴⁾ Aus obigen Angaben nach Compton errechnet (s. Fig. 6 bei Compton).

harter γ -Strahlung ist noch eine andere Erklärung des Schwächungsprozesses denkbar. Man könnte annehmen, daß Streuung durch Compton-Prozesse wie im ersten Falle nur an den Elektronen der Atomschale stattfindet. Der Atomkern könnte dann eine Zusatzabsorption ergeben, z. B. durch Aufspaltung von γ -Quanten in Elektronenpaare, wie es bei der radio-

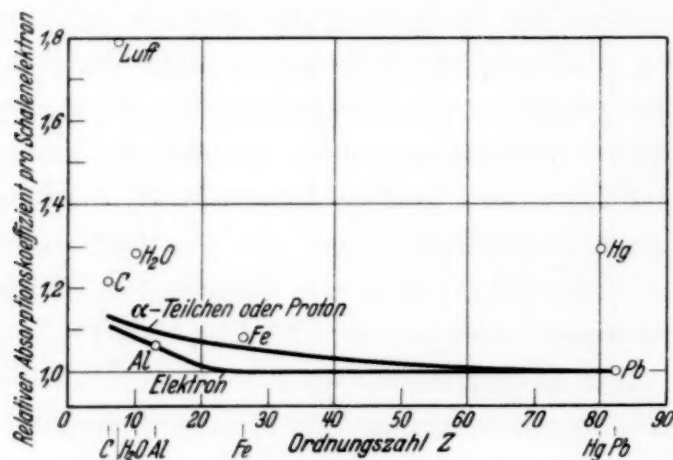


Fig. 9. Die relative Schwächung pro Elektron in Abhängigkeit von der Ordnungszahl. Blei gleich 1 gesetzt. Der Meßpunkt für Hg ist unsicher. Für Luft wurde er aus dem Barometer-effekt bestimmt. Die Kurven sind nach Bloch berechnet.

aktiven γ -Strahlung beobachtet ist. Nach neueren Untersuchungen¹⁾ wächst die Absorption pro Schalelektron bei ThC''-Strahlung ($\lambda = 4,7$ X-E.) mit der dritten Potenz der Ordnungszahl. Bei der Ultrastrahlung ergab sich aber aus meinen Messungen mit wachsender Ordnungszahl im Gegenteil eine Abnahme. Wenn also in dem untersuchten

Energiebereich nicht ein ganz neuartiger Schwächungsprozeß von Wellenstrahlung auftritt, so lassen sich meine Messungen nicht unter der Annahme einer reinen Wellennatur der Ultrastrahlung deuten.

Als nächstes soll die Möglichkeit einer Strahlung geladener Korpuskeln behandelt werden. Das Problem der Bremsung einer solchen Strahlung ist weitgehend durch neuere theoretische Arbeiten von Möller, Heisenberg, Flüge, Bethe und Bloch²⁾ geklärt. Die im Atom verschieden stark gebundenen Schalelektronen nehmen von dem bewegten Teilchen einen verschieden großen Energieteil auf. In Tabelle 11 ist nach einer von Bloch hergeleiteten Formel³⁾ die im Mittel an ein Schalelektron abgegebene Energie für drei verschiedene Teilchenarten und für alle in dieser Arbeit experimentell untersuchten Substanzen ausgerechnet (Tabelle 11 und 12). Es interessiert hier aber nur der Gang mit der Ordnungs-

¹⁾ L. Meitner u. H. H. Hupfeld, ZS. f. Phys. **75**, 705, 1932; Araktsu, Mem. Sci. Agric. Taihoku (5) **5**, 4, 163, 1932; J. R. Oppenheimer u. J. S. Plesset, Phys. Rev. **44**, 53, 1933. — ²⁾ H. Bethe, ZS. f. Phys. **76**, 293, 1932; Handb. Geiger-Scheel XXIV/1, 519, 1933; F. Bloch, ZS. f. Phys. **81**, 363, 1933; C. Möller, Ann. d. Phys. **14**, 531, 1932; W. Heisenberg, Ann. d. Phys. **13**, 430, 1932; S. Flüge, ZS. f. Phys. **85**, 693, 1933. — ³⁾ F. Bloch, ZS. f. Phys. **81**, 374, 1933, Gleichung (34).

zahl. In Tabelle 12 ist aus den Werten von Tabelle 11 die relative Absorption für ein Teilchen von der Energie 10^{10} e-Volt ausgerechnet, wobei der Wert von Blei gleich 1 gesetzt ist. Für Energien zwischen 10^8 und 10^{12} e-Volt unterscheidet sich die relative Absorption nur unwesentlich. Die experimentell bestimmten Werte (Tabelle 10) sind in Spalte 5 angeführt. Die graphische Darstellung der Meßpunkte, sowie die theoretisch nach Bloch berechneten Kurven zeigt Fig. 9. Es treten bei den beobachteten Werten noch erhebliche Abweichungen auf, trotzdem ist eine Zunahme der Absorption mit abnehmender Ordnungszahl nicht zu verkennen. Bei der Betrachtung der Figur ist aber nicht zu vergessen, daß die Werte für Hg und Al mangels genügender Schichtdicken nur unsicher bestimmt werden konnten, und daß der Wert für Luft aus dem BE als reinem Absorptionseffekt errechnet wurde. Es sieht so aus, als ob bei der Absorption noch andere Effekte auftreten, die in der Theorie noch nicht genügend berücksichtigt sind. Zusammenfassend muß gesagt werden, daß die von mir gefundene Abweichung der Absorption pro Schalenelektron sich nicht restlos durch theoretische Überlegungen deuten läßt, aber wenig-

Tabelle 11. Energieverlust pro Schalenelektron
(nach einer von Bloch hergeleiteten Formel berechnet).

Gebremstes Teilchen	Bremsende Substanz	Anfangsenergie in e-Volt					
		10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}
		Energieverlust pro Schalenelektron der durchquerten Substanz in 10^{-18} e-Volt					
Elektron	Pb	10,89	12,05	13,21	14,36	15,52	16,68
	Hg	10,90	12,06	13,22	14,38	15,54	16,70
	Fe	10,93	12,09	13,24	14,40	15,56	16,72
	Al	11,86	13,02	14,18	15,34	16,50	17,66
	H ₂ O	12,03	13,19	14,35	15,51	16,67	17,83
	Luft	12,17	13,33	14,49	15,65	16,81	17,96
	C	12,26	13,42	14,55	15,74	16,90	18,06
Proton	Pb	7,81	8,97	10,13	11,29	12,45	13,61
	Hg	7,83	8,99	10,14	11,30	12,46	13,62
	Fe	8,39	9,55	10,71	11,87	13,03	14,19
	Al	8,74	9,90	11,06	12,22	13,38	14,53
	H ₂ O	8,87	10,03	11,19	12,35	13,51	14,67
	Luft	9,04	10,20	11,36	12,51	13,67	14,83
	C	9,13	10,29	11,45	12,61	13,77	14,92
α -Teilchen	Pb	14,93	17,25	19,57	21,89	24,20	26,52
	Hg	14,96	17,77	19,59	21,91	24,23	26,54
	Fe	16,09	18,40	20,72	23,04	25,36	27,67
	Al	16,78	19,10	21,42	23,74	26,05	28,37
	H ₂ O	17,05	19,37	21,68	24,00	26,32	28,64
	Luft	17,38	19,70	22,01	24,33	26,65	29,97
	C	17,56	19,88	22,20	24,51	26,83	29,15

stens läßt sich dem Sinne nach das Meßresultat mit der Annahme einer Strahlung geladener Korpuskeln vereinbaren.

Tabelle 12. Die relative Absorption pro Schalenelektron.

1	2	3	4	5
	berechnet für ein			beobachtet
	Elektron	Proton	α -Teilchen	
Pb	1,00	1,00	1,00	1,00
Hg	1,00	1,00	1,00	1,29
Fe	1,00	1,06	1,06	1,08
Al	1,07	1,09	1,09	1,06
H ₂ O	1,08	1,10	1,10	1,28
Luft	1,10	1,12	1,12	1,79
C	1,10	1,13	1,13	1,21

Auf die Diskussion der Möglichkeit einer ungeladenen Korpuskularstrahlung muß noch verzichtet werden, da über die Absorption einer solchen Strahlung noch zu wenig bekannt ist.

Die Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Priv.-Doz. Dr. E. G. Steinke im I. Physikalischen Institut in Königsberg ausgeführt. Die Finanzierung der teuren Aufbauten wurde mit Unterstützung der Helmholtz-Gesellschaft, der Deutschen Notgemeinschaft, des Königsberger Universitätsbundes und aus Institutsmitteln durchgeführt. Zu den Messungen wurden insgesamt 4900 kg Eisen, 4700 kg Blei und 520 kg Aluminium benutzt. Ein Teil des Bleipanzers wurde von der Koholyt A.-G., die Steinkohlenbriketts (1500 kg) von der Deutschen Reichsbahn für die Dauer der Messungen in entgegenkommender Weise überlassen. Ebenso stellte mir Priv.-Doz. Dr. E. G. Steinke einige Apparate aus seinem Privatbesitz zur Verfügung. Für alle diese Unterstützungen sei auch hier vielfach gedankt. Eine besondere Freude ist es mir, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. W. Kaufmann und Herrn Priv.-Doz. Dr. E. G. Steinke für viele Ratschläge und Unterstützungen herzlich zu danken. Ebenso möchte ich auch allen denjenigen, die mir bei dem Umpacken des umfangreichen und schweren Panzermaterials geholfen haben, meinen Dank aussprechen.

Königsberg (Pr.), I. Physikalisches Institut, Oktober 1934.

Die Empfindlichkeit von Lichtzählern.

Von **M. W. Karev**¹⁾ und **S. F. Rodionov** in Leningrad.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1934.)

Es wird die Messung der Empfindlichkeit von Lichtzählern beschrieben. Es wird die Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Intensität und der Wellenlänge des zu untersuchenden Lichtes untersucht. Es werden vergleichende Messungen der Empfindlichkeit als Lichtzähler und als Photoelement in absoluten Größen vorgenommen.

1. Die von Elster und Geitel²⁾ in ihrer Arbeit vorgeschlagene Methode zur Messung kleiner Lichtintensitäten fand weite Verbreitung in Form der Lichtzähler, die eine wirkliche Ergänzung und Erweiterung der Geigerschen Zähler im Gebiet langsamer Elektronen darstellten. Da ihre Anwendung auf den verschiedensten Gebieten — Biologie, Meteorologie, Spektroskopie u. a. — weite Perspektiven eröffnete, wurden die Lichtzähler einer ganzen Reihe von Untersuchungen unterworfen.

Trotzdem besteht noch keine völlige Klarheit über die Erscheinungen, die bei der Arbeit mit dem Lichtzähler auftreten. Diese fehlende Klarheit macht es unmöglich, eine Reihe von Feststellungen zu machen, die große praktische Bedeutung haben.

Die Notwendigkeit, diese Feststellungen zu machen, fordert das Aufwerfen einiger Fragen allgemeineren Charakters, deren Entscheidung als Grundlage für die Behandlung von Aufgaben mehr angewandter Art dient.

Einer dieser Punkte ist die Frage nach dem Photoeffekt in Lichtzählern, die sich bei unseren Untersuchungen über die Empfindlichkeit der Methode ergab. Nach der schon von Elster und Geitel vertretenen Anschauung soll jede im Lichtzähler beobachtete Entladung von einem Photoelektron hervorgerufen sein, so daß die Zahl dieser Entladungen proportional dem auffallenden Licht ist.

Die Proportionalität zwischen der Zahl der Entladungen und der Intensität wurde von Locher³⁾ direkt bestätigt. Trotzdem muß gesagt werden, daß sowohl die Frage des Photoeffektes in Lichtzählern wie auch die Frage der Proportionalität niemals systematisch untersucht wurde.

Der Unterschied zwischen dem Photoeffekt in Zählern und in Photoelementen besteht darin, daß der Zähler den Austritt einzelner Photo-

¹⁾ Die vorliegende Arbeit wurde als Diplomarbeit im Leningrader Physikalisch-mechanischen Institut verteidigt. — ²⁾ J. Elster u. H. Geitel, Phys. ZS. **17**, 186, 1916. — ³⁾ L. Locher, Phys. Rev. **42**, 525, 1932.

elektronen registriert, während man in Photoelementen die Summe der Effekte als Photostrom beobachtet. Die wesentliche Größe, die die photoelektrische Empfindlichkeit der Methode charakterisiert, ist die sogenannte Elektronenausbeute, die das Verhältnis der vom Licht ausgelösten Elektronen zur Zahl der absorbierten Quanten darstellt.

Nach der allgemeinen Vorstellung über den Photoeffekt und nach zahlreichen Versuchsergebnissen soll die Größe dieser Elektronenausbeute erheblich kleiner als Eins sein.

In der Arbeit von Compton und Richardson¹⁾ ist die Elektronenausbeute in Photoelementen für die meisten Metalle eingehend untersucht, während dies in Lichtzählern keineswegs der Fall ist. Alle Autoren, die mit Lichtzählern arbeiteten²⁾, maßen gewöhnlich die Empfindlichkeit nur für die eine Wellenlänge, die für sie besonderes Interesse darbot, und dehnten die Untersuchungen niemals auf ein etwas breiteres Wellenlängengebiet aus.

Die Meßergebnisse dieser Autoren waren nur schwer zu reproduzieren, da keiner einen genügend stabil arbeitenden Apparat benutzte.

Im Hinblick hierauf und weil alle diese Arbeiten mit verschiedenen Zählern gemacht worden waren, können die Resultate gar keine Vorstellungen über die Natur des Photoeffektes in Lichtzählern geben und erst recht nicht die

Frage nach der spektralen Empfindlichkeitsverteilung beantworten.

2. Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Bestimmung der Elektronenausbeute für einen Lichtzähler und der Vergleich derselben mit der Ausbeute, die bei Benutzung desselben Apparates als gewöhnliches Photoelement erhalten wurde.

Der Lichtzähler (Fig. 1), mit dem diese Arbeit durchgeführt

wurde, war folgendermaßen hergestellt³⁾: Auf einen Platinüberzug, der durch Kathodenzerstäubung auf Glas niedergeschlagen war, wurde nach

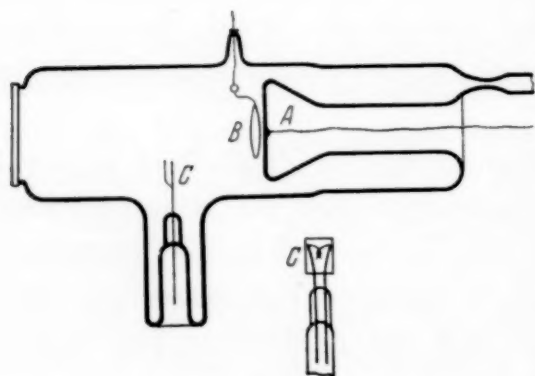


Fig. 1. A = Kathode. B = Anode.
C = Aluminium zum Verdampfen.

¹⁾ K. T. Compton u. O. W. Richardson, Phil. Mag. **26**, 549, 1913. —

²⁾ J. Elster u. H. Geitel, l. c.; Schreiber u. Friedrich, Biochem. ZS. **227**, 386, 1930; B. N. Rajewsky, Phys. ZS. **32**, 121, 1931; G. M. Frank u. S. F. Rodionov, Biochem. ZS. **249**, 324, 1932. — ³⁾ S. F. Rodionov u. A. I. Schalnikow, Journ. f. exper. u. theor. Physik (russ.), im Druck.

sorgfältiger Vorübung an der Pumpe eine Schicht von Aluminium verdampft, worauf der Zähler mit Wasserstoff gefüllt (1,8 mm Hg) und abgeschmolzen wurde.

Da der Lichtzähler nur bei sehr kleinen Lichtintensitäten arbeiten kann, deren unmittelbare Messung nicht möglich ist, mußte eine starke Lichtquelle benutzt werden, deren Intensität zunächst gemessen und dann für die Arbeit mit dem Zähler durch ein Filter in bekannter Weise geschwächt wurde.

Als Lichtquelle diente eine Quarz-Quecksilberlampe, deren Licht durch einen Quarzdoppelmonochromator zerlegt wurde. Jede Spektrallinie wurde für sich zur Messung durch entsprechende Verschiebung der Linsen und Prismen fokussiert. Die Strahlenintensität wurde mit einer Thermosäule gemessen.

Als Absorptionsfilter diente eine Chininlösung, die sich in einem Gefäß mit parallelen, plangeschliffenen Quarzplatten befand, deren Entfernung mit einer Mikrometerschraube verändert werden konnte (Absorptionsgefäß von Leiss). Der Abstand zwischen den Platten konnte von 0 bis 15 mm mit einer Genauigkeit von 0,1 mm verändert werden, wodurch sich die Intensität jeder gemessenen Spektrallinie bis zur Grenze der Empfindlichkeit des Zählers verringern ließ. Die Absorption jeder Spektrallinie durch die Chininlösung war vorher gemessen worden und wurde außerdem vor jeder Messung mit dem Lichtzähler durch eine Absorptionsmessung kontrolliert.

Als Größe, die die Arbeit des Apparates charakterisierte, diente der reziproke Wert der Elektronenausbeute.

Je nachdem, ob der Apparat als Lichtzähler oder als Photoelement benutzt wurde, wechselte die Bedeutung dieser Größe: im ersten Falle war es das Verhältnis der Zahl der Quanten zu einer Entladung, im zweiten zu einem Elektron. Es muß bemerkt werden, daß die Zahl der Entladungen für den benutzten Zähler nicht proportional der Intensität des auffallenden Lichtes war.

Damit trotz dieser Unproportionalität die Änderung der Ausbeute in Abhängigkeit von der Wellenlänge festgestellt werden konnte, wurden die Messungen für alle λ bei gleicher Intensität vorgenommen. Jeder Wert der Ausbeute für ein bestimmtes n (die Zahl der Entladungen) und λ war das Mittel aus vier bis sechs Versuchsreihen erhalten.

Es muß schließlich bemerkt werden, daß bei allen Berechnungen der Größe der Ausbeute an Stelle der absorbierten Energie die Menge der

auffallenden Energie eingesetzt wurde, d. h. die Reflexion wurde bei der Rechnung nicht berücksichtigt.

3. Der Lichtzähler, mit dem alle Messungen vorgenommen wurden, arbeitete zwar sehr konstant, hatte aber eine nur verhältnismäßig kleine Empfindlichkeit. Einen empfindlicheren Zähler herzustellen wäre zwar ohne weiteres möglich gewesen, aber für die vorliegende Arbeit spielte das keine besondere Rolle, außerdem arbeitete das schließlich ausgewählte Exemplar besonders gleichmäßig und einwandfrei.

Die Kurven in Fig. 2 geben die wesentlichen Resultate der vorliegenden Arbeit wieder und ermöglichen es, die Wirkungsweise unseres Apparates

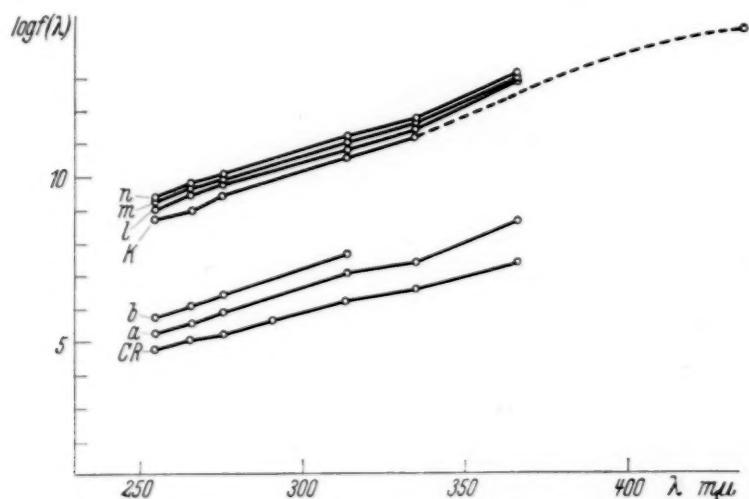


Fig. 2. *a* = Photoelement Al (400 Volt). *b* = Photoelement Al (300 Volt).
CR = Angaben von Compton und Richardson (in entsprechenden Einheiten).
k, l, m, n = Lichtzähler Al (480 Volt).

als Zähler und als Photoelement zu vergleichen. Auf der Abszisse sind die Wellenlängen, auf der Ordinate die Ausbeuten in logarithmischem Maßstab angegeben.

Bei Betrachtung der Kurven entsteht sofort die Frage nach dem Grund derartig verschiedener Ausbeuten des Zählers und des Photoelements.

Der Unterschied in den Ausbeuten kann durch die verschiedene Spannung am Zähler und am Photoelement nicht erklärt werden, denn gerade die Kurven für die Ausbeute des Photoelementes (Fig. 2), die bei geringeren Spannungen (300 Volt) erhalten werden, lassen erkennen, daß eine Annäherung der Spannung des Photoelementes (400 Volt) an die Spannung des Zählers (480 Volt) den Unterschied der Ausbeuten zwischen Zähler und Photoelement noch *vergrößern* würde.

Es gibt nur folgende beiden Erklärungsmöglichkeiten für diese Erscheinung: entweder registriert der Lichtzähler nicht alle austretenden

Photoelektronen, oder die austretenden Elektronen werden zwar sämtlich registriert, aber es gibt gewisse Bedingungen, unter denen das Metall nur einen Teil der vom Licht ausgelösten Elektronen wirklich freigibt.

Nimmt man die erste Möglichkeit an, so sollte man bei Erhöhung des Gasdruckes im Zähler und bei entsprechender Vergrößerung der angelegten Spannung wenn auch nicht eine völlige Übereinstimmung der Ausbeuten von Zähler und Photoelement, so doch auf jeden Fall eine Verringerung der Differenz erhalten.

Wenn jedoch der Zähler jedes das Metall verlassende Elektron registriert, dann läßt sich die Differenz der Ausbeuten nur so erklären, daß

Tabelle 1 zu Fig. 2.

λ $m\mu$	Ausbeute in Quant Elektronen · sec		λ $m\mu$	Ausbeute in Quant/Elektronen · sec	
	Photoelement 400 Volt	Photoelement 300 Volt		Photoelement 400 Volt	Photoelement 300 Volt
254	$1,84 \cdot 10^5$	$5,28 \cdot 10^5$	313	$1,12 \cdot 10^7$	$4,14 \cdot 10^7$
265	$3,8 \cdot 10^5$	$1,32 \cdot 10^6$	334	$2,52 \cdot 10^7$	—
275	$8,3 \cdot 10^5$	$2,38 \cdot 10^6$	365	$3,54 \cdot 10^8$	—

Tabelle 2 zu Fig. 2. (Lichtzähler 480 Volt.)

λ $m\mu$	Ausbeute in Quant/Entladung · sec			
	k für $n = 0,05$ Entl./sec	l für $n = 1$ Entl./sec	m für $n = 1,25$ Entl./sec	n für $n = 1,5$ Entl./sec
254	$5,45 \cdot 10^8$	$1,02 \cdot 10^9$	$1,65 \cdot 10^9$	$2,41 \cdot 10^9$
265	$7,74 \cdot 10^8$	$2,5 \cdot 10^9$	$4,19 \cdot 10^9$	$5,7 \cdot 10^9$
275	$2,57 \cdot 10^9$	$5,95 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^9$	$1,12 \cdot 10^{10}$
313	$3,52 \cdot 10^{10}$	$6,63 \cdot 10^{10}$	$9,9 \cdot 10^{10}$	$1,34 \cdot 10^{11}$
334	$1,52 \cdot 10^{11}$	$2,39 \cdot 10^{10}$	$3,25 \cdot 10^{11}$	$4,46 \cdot 10^{11}$
365	—	$8,1 \cdot 10^{12}$	$8,83 \cdot 10^{12}$	$1,12 \cdot 10^{13}$
435	$3,13 \cdot 10^{14}$	—	—	—

es anscheinend unter den Arbeitsbedingungen des Zählers gewisse Faktoren gibt, die nur einem Teil der vom Licht ausgelösten Elektronen gestatten, aus dem Metall auszutreten. Derartige hemmende Faktoren können nur als Folge der Entladungen auftreten, die den Austritt der einzelnen Photoelektronen begleiten.

Sehr wahrscheinlich besteht diese Einwirkung in einer Veränderung der Oberfläche, die den Austritt der folgenden Elektronen bis zur Erreichung eines Gleichgewichtes unmöglich macht. Die Entscheidung, welches die Ursache für die Differenz der Ausbeuten zwischen Zähler und Photoelement ist, kann erst auf Grund weiterer Versuche getroffen werden.

Der verschiedene Gang der Kurven für den Zähler (k, l, m, n in Fig. 2) rührt daher, daß die Zahl der Entladungen bei dem benutzten Zähler nicht proportional der Intensität des auffallenden Lichtes war. Für das benutzte Exemplar kann die Abhängigkeit der Zahl der Entladungen von der Intensität angenähert durch die Formel

$$n = A + B \sqrt{i_\lambda}$$

dargestellt werden, worin n die Zahl der Entladungen in 1 Sek., i_λ die Intensität der betreffenden Spektrallinie und A und B Konstanten sind.

Die Frage der Nichtproportionalität zwischen dem Zählereffekt und der Intensität, sowie eine Reihe weiterer Fragen, deren Beantwortung sich als unerläßlich auf Grund dieser Arbeit erweist, werden weiter von uns untersucht werden.

In der letzten Nummer der Zeitschrift für technische Physik wurde eine Arbeit von Hausser und Kreuchen¹⁾ veröffentlicht, in der zum ersten Male die Abhängigkeit der Größe der Elektronenausbeute von der

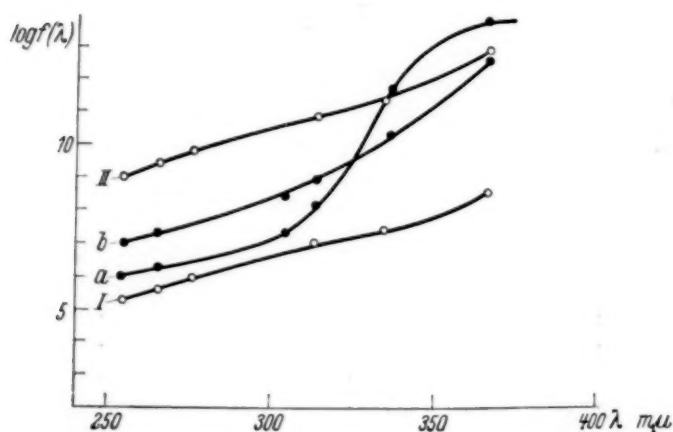


Fig. 3. I = Photoelement Al (400 Volt).
II = Lichtzähler Al (480 Volt).
a = Zähler Cd nach Hausser und Kreuchen.
b = Zähler Zn nach Hausser und Kreuchen.

Wellenlänge für einen Lichtzähler des (zylindrischen) Geiger-Müller-Typus mitgeteilt wurde. In dieser Arbeit findet sich die Angabe, daß die Größe der Ausbeute für den Zähler der Ausbeute für das Photoelement entspricht.

In der Fig. 3 sind die von Hausser und Kreuchen gefundenen Kurven zusammen mit

unseren eingetragen. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, daß der Zähler von Hausser und Kreuchen eine erheblich größere Empfindlichkeit hat, als der für die vorliegende Arbeit benutzte. Wenn man entsprechend der Angabe dieser Autoren annimmt, daß die Kurven ihrer Apparate für die Benutzung als Photoelemente ungefähr ebenso verlaufen, d. h. höher als die Kurve I unseres Apparates, dann folgt daraus, daß ihre Apparate als Zähler empfindlicher sind als der unserige, daß sie

¹⁾ K. W. Hausser u. K. H. Kreuchen, ZS. f. techn. Phys. 15, 20, 1934.

jedoch eine geringere Empfindlichkeit als Photoelemente aufweisen. Jedenfalls erscheint es uns noch verfrüht, ähnliche Schlüsse zu ziehen, wie die von Hausser und Kreuchen über die Gleichheit der Ausbeuten für Zähler und Photoelemente, die sich nicht auf experimentelle Daten stützen, sondern die nur als allgemeine Erwägung angegeben sind. Nichtsdestoweniger sind auch solche Bedingungen denkbar, bei denen die Ausbeuten als Zähler und als Photoelement gleich oder doch annähernd gleich sein werden. Die vorliegende Arbeit stellt nur eine vorläufige Mitteilung dar; weitere Experimente werden folgen.

Zusammenfassung.

Es wurde die Abhängigkeit der Elektronenausbeute in einem Lichtzähler von der Wellenlänge und der Lichtintensität untersucht.

Es wurde ein Vergleich der Größe der Ausbeute bei der Benutzung als Lichtzähler und als einfaches Photoelement durchgeführt, wobei erhebliche quantitative Unterschiede gefunden wurden.

Zum Schluß sprechen wir Herrn G. M. Frank, in dessen Laboratorium diese Arbeit ausgeführt wurde, sowie Herrn A. I. Schalnikow für eine Reihe wertvoller Hinweise unseren Dank aus.

Leningrad, Physikal.-agronom. Institut, Biophysikal. Laboratorium.

Ein Röntgenspektrometer für Hochvakuum mit Konkavkristall nach Johann.

(Zweite Mitteilung.)

Von **Arne Sandström** in Uppsala.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1934.)

Gestützt auf die Erfahrungen mit dem in der ersten Mitteilung¹⁾ beschriebenen Versuchsaппarat wurde ein größerer Spektrograph gebaut, der in Kürze beschrieben wird. Die in der ersten Mitteilung angefangene Klarlegung des Einflusses des Fokussierungsdefektes und des schrägen Einfalls gegen die photographische Platte auf die Verbreiterung der Spektrallinien wird hier fortgesetzt. Das Ergebnis ist, daß die Intensitätsverteilung in der Verbreiterung näherungsweise die Gaußsche Form hat.

Apparatur. Nachdem die vielseitige Brauchbarkeit der Konkavkristallmethode durch die Untersuchungen mit dem in der ersten Mitteilung¹⁾ beschriebenen Versuchsaппarat und durch solche mit anderen Spektrographen²⁾ nach Johanns Prinzip erwiesen war, wurde ein größerer und verbesserter Spektrograph gebaut, der durch Benutzung eines gußeisernen Vakuumbehälters von einem neuen, von M. Siegbahn eingeführten Typus eine sehr bequeme Ausführung erhalten konnte.

In Fig. 1 ist der Spektrograph mit aufgeschlagenem Deckel wiedergegeben. Er hat folgende Maße: nutzbare Länge 850 mm, Breite 250 mm und Höhe des Deckels 70 mm. Die Dichtung zwischen Tisch und Deckel erfolgt mit Hilfe eines Gummiringes, der in einer ringsum am Rande des Tisches verlaufenden Rille liegt. Die Röntgenröhre besteht aus zwei Teilen, dem Antikathodenteil, der mit Hilfe einer mit Gummi abgedichteten Durchführung im Tische angebracht ist, und dem Kathodenteil, der in derselben Weise im Deckel befestigt ist. Die beiden Teile der Röntgenröhre schließen mit Hilfe einer Federanordnung lichtdicht gegeneinander. Der sich in einer Geraden erstreckende Glühdraht besteht aus spiralgespultem Wolframdraht; er gibt einen Brennfleck von hinreichender Ausdehnung, um bei kürzestem Abstand zur Kassette einen Bereich von 40 mm auf der Platte vollkommen gleichmäßig zu schwärzen. Die Strahlung tritt durch ein Fenster aus, das sich um den halben Umkreis der Röhre erstreckt. Das Strahlenbündel wird mit Hilfe einer am Antikathodenteil verschiebbaren

¹⁾ Arne Sandström, ZS. f. Phys. **84**, 541, 1933. — ²⁾ Harald Karlsson u. Manne Siegbahn, ZS. f. Phys. **88**, 76, 1934.

Blende auf die gewünschte Größe gebracht. Die Röhre und der umgebende Vakuumbehälter werden einzeln für sich evakuiert und man kann daher von der Röhre stammendes sichtbares Licht durch Anbringen einer Aluminiumfolie von $0,5 \mu$ Stärke an dem Fenster vollkommen ausschließen.

Der Spektrograph wird auf dem Tisch des Vakuumbehälters aufgestellt und seine Lage zum Strahlenbündel wird durch einen um die Röntgenröhre drehbaren Arm und durch ein Lineal fixiert, an dem entlang der eine der drei als Stellschrauben ausgebildeten Füße des Spektrographen gleiten



Fig. 1. Totalansicht des neuen Spektrographen.

kann. Die Einstellung des Glanzwinkels erfolgt an einer am Kristallhalter angebrachten Skale, die über einem Index auf dem drehbaren Arm spielt. Mit einem Schirm über dem Kristallhalter wird möglicherweise von der Röhre kommende schädliche Strahlung abgeschirmt.

Der wesentlichste Unterschied zwischen dem neuen und dem früheren Spektrographen besteht darin, daß die den ganzen Winkelbereich umfassende Kassette durch einen verstellbaren Sektor (Fig. 2) ersetzt wurde, an dessen Peripherie eine abnehmbare Kassette verschoben werden kann und an dessen vorderem Rand eine Blende als Strahlungsschutz angebracht ist. Der Sektor ruht auf einem Rahmen, der auf der entgegengesetzten Seite den Kristalltisch trägt. Letzterer hat dieselben Justierungsmöglichkeiten wie

bei optischen Gitteraufstellungen. Der Kristallhalter entspricht im Prinzip dem beim früheren Versuchsapparat angewandten, ist aber bedeutend größer. Die Erfahrung hat nämlich gezeigt, daß es vorteilhaft ist, große Kristallstücke einzubauen; anfänglich gute Kristalle können nämlich beim Zerteilen an Güte verlieren.

Die Kassette wurde abnehmbar gemacht, um den Film beim Einsetzen in sie genau überwachen zu können, was jetzt ganz besonders wichtig war, weil der früher angewandte dicke und steife Eastman Process-Film durch den gewöhnlichen Positivfilm ersetzt wurde, wobei hauptsächlich ebenfalls Eastmanfabrikat zur Verwendung gelangte. Dieser Film ist im Bereich 2 bis 10 Å sehr vorteilhaft und gibt sehr kontrastreiche Spektrogramme.

Einer der Hauptvorteile der Anordnungen in dem neuen Apparat liegt darin, daß man in den Vakuumbehälter für verschiedene Kristallradien

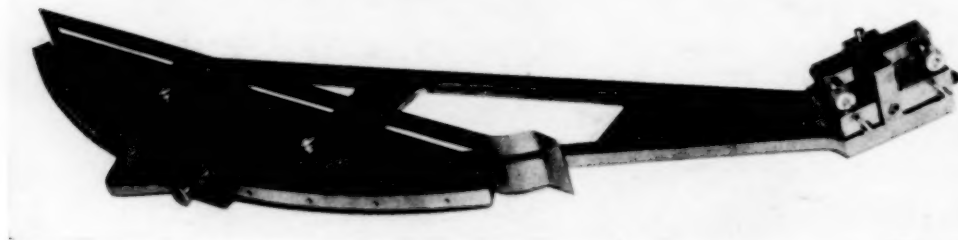


Fig. 2. Der Konkavkristallspektrograph.

und Winkelbereiche leicht verschiedene Spektrographen einsetzen kann und daß sich deren Umtausch bei Bedarf rasch durch einige einfache Handgriffe bewerkstelligen läßt. Derzeit liegen Spektrographen für den Kristallradius $R = 1000$ mm, Winkelbereich 15 bis 45° , für $R = 700$ mm, Winkelbereich 40 bis 65° und für $R = 400$ mm, Winkelbereich 40 bis 85° vor.

Die Verbreiterung der Spektrallinien. In der ersten Mitteilung wurde die Intensitätsverteilung in der durch die geometrischen Verhältnisse verursachten Verbreiterung des Wellenlängenbildes berechnet¹⁾ (erste Mitteilung, Fig. 5e und f). Wenn man den Einfluß der Absorption und der Fluoreszenzstrahlung und die Störungen zufolge der endlichen Größe des photographischen Korns berücksichtigt, kommt man zu einem in Fig. 3 dargestellten Intensitätsverlauf, wenn der Fokussierungsdefekt gleich oder größer als die Verbreiterung zufolge der Emulsionsdicke ($b \geq b''$) ist,

¹⁾ In die erste Mitteilung haben sich einige Fehler eingeschlichen. S. 547, Zeile 9 soll lauten: ... der eine für $b'' < b$ (Fig. 5e) und der andere für $b'' > b$ (Fig. 5f) ...

was am häufigsten der Fall ist. (Die Bezeichnungen in der Figur sind dieselben wie in der ersten Mitteilung.)

Es ist offenkundig abwegig, mit der Linienverbreiterung so zu rechnen, als ob sie in gleicher Weise wie bei Spektrographen mit Spalt entstanden wäre. Die Form der Kurve ist vielmehr eher derart, daß man mit hinreichender Annäherung annehmen kann, daß sie einer Gaußschen Verteilung der Intensität entspricht. Dabei ist natürlich vorauszusetzen, daß die Kristalle nicht mit größeren Biegungsfehlern behaftet sind. Die in Fig. 4 wiedergegebenen Aufnahmen und die Photometerkurven in Fig. 5 und 6 zeigen, daß die Linien im großen und ganzen symmetrisch sind; bei den Photometerkurven läßt sich jedoch ein etwas langsamer Intensitätsabfall auf der Seite längerer Wellenlängen feststellen. Diese

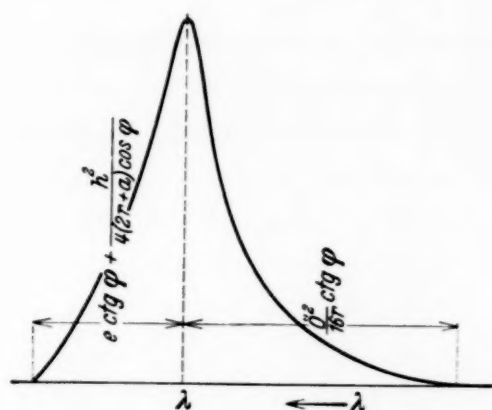


Fig. 3.

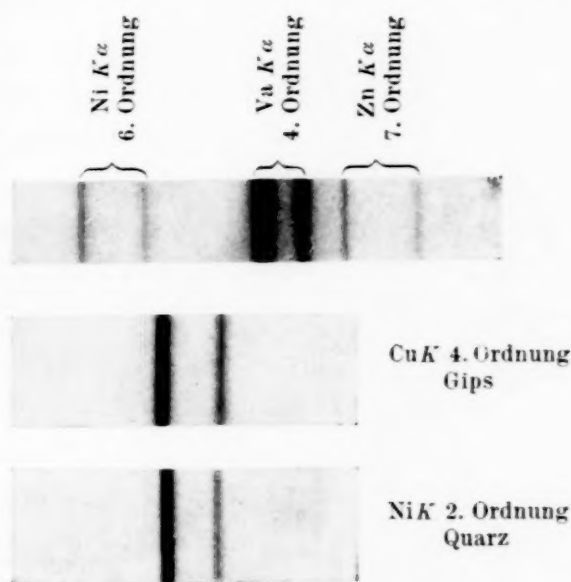


Fig. 4. Einige Aufnahmen von $K\alpha$ -Dubletten. Die obere 3 mal vergrößert, die beiden unten 5 mal vergrößert.

Asymmetrie tritt jedoch auch bei Aufnahmen mit der Doppelkristallmethode auf und muß als eine Eigentümlichkeit der betreffenden $K\alpha$ -Linien gedeutet werden¹⁾.

Bisher wurde der Einfluß des Kristallreflexionsbereiches nicht in Betracht gezogen. Im allgemeinen nimmt man an, daß die Intensitätsverteilung desselben sowie die Intensität in der natürlichen Linienbreite Gaußsche Form hat. Wenn man also die nach Gleichung (1), (2) und (3) (erste Mitteilung) berechnete halbe Verbreiterung mit H_B bezeichnet, die halbe Breite des Kristallreflexionsbereiches mit H_E und die vermessene Halbwertsbreite der Linie mit H_M , so ist die wahre Halbwertsbreite H_W der Linie

$$H_W = \sqrt{H_M^2 - H_B^2 - H_E^2}. \quad (1)$$

¹⁾ S. K. Allison, Phys. Rev. 44, 62, 1933.

Es ist schwer zu untersuchen, ob die in Fig. 3 dargestellte Intensitätsverteilung im Einklang mit der Wirklichkeit ist. Eine Prüfung durch Variation der Kristallöffnung wird unmöglich wegen der Schwierigkeit, Kristalle mit großen Öffnungen ohne Biegungsfehler zu erhalten und bei sehr kleinen Öffnungen bekommt man eine Verteilung wie in Fig. 5f der ersten Mitteilung. Auf Umwegen kann man jedoch zu einer gewissen Kontrolle gelangen. Bei Linien, deren Halbwertsbreiten durch Messungen nach der genaueren Doppelkristallmethode gut bekannt sind, kann man wahr-

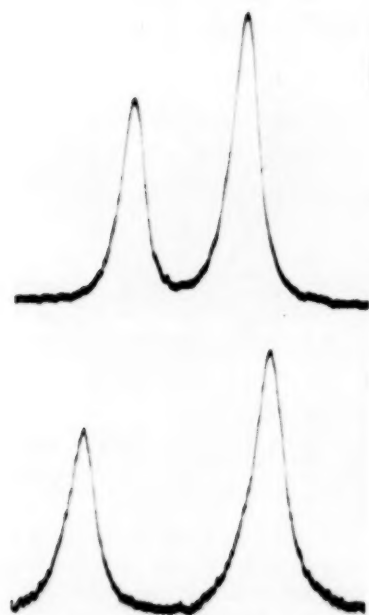


Fig. 5. Oben, Photometerkurve von $\text{Zn } K\alpha_1\alpha_2$ 6. Ordnung und unten von $\text{Zn } K\alpha_1\alpha_2$ 4. Ordnung mit Gips als Gitter. Abszissenvergrößerung 10 mal.

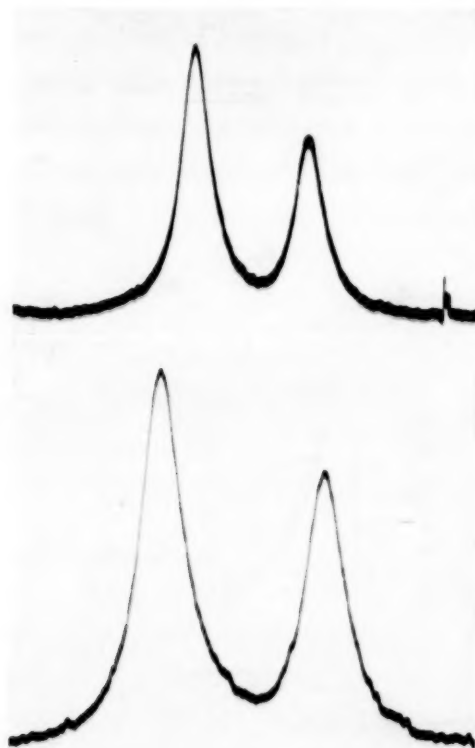


Fig. 6. Oben, Photometerkurve von $\text{Ni } K\alpha_1\alpha_2$ 4. Ordnung mit Gips als Gitter. Unten, Photometerkurve von $\text{Ni } K\alpha_1\alpha_2$ 3. Ordnung mit Quarz als Gitter. Abszissenvergrößerung 10 mal.

scheinlich einen Vergleich mit den nach Gleichung (1) berechneten Halbwertsbreiten dazu benutzen, ein Urteil über die oben durchgeführten Betrachtungen betreffend die geometrischen Linienverbreiterungen zu bekommen. Als Vergleichsmaterial wurden hauptsächlich die Werte von Allison¹⁾ und Parratt²⁾ benutzt. Die Messungen wurden bei Winkeln $< 43^\circ$ ausgeführt, wo die Verbreiterung noch ziemlich groß ist. Aus der

¹⁾ S. K. Allison, l. c. — ²⁾ Lyman G. Parratt, Phys. Rev. **44**, 695, 1933.

Möglichkeit, höhere Ordnungen zufolge der großen Lichtstärke des Apparats zu verwenden, ergibt sich auch der Vorteil, daß die Vernachlässigung des Einflusses der mikrokristallinen Struktur (der bei Einkristallmethoden nicht bestimmt werden kann) von geringerer Bedeutung wird.

Die Halbwertsbreite wird definiert als Abstand vom Intensitätsmaximum bis zu der Stelle auf der Linie, wo die Intensität auf die Hälfte gefallen ist, und man kann daher bei $K\alpha$ -Dubletten folgende Methode zur Bestimmung der Halbwertsbreite von $K\alpha_1$ benutzen. Eine photographische Aufnahme von $K\alpha_1\alpha_2$ wird mit genügend großer Abszissenvergrößerung photometriert. Da die Intensität von α_2 die Hälfte von der von α_1 beträgt, erhält man die doppelte Halbwertsbreite, wenn man in der Kurve die Breite von α_1 in der Höhe der Spitze von α_2 mißt. Da schlechte Auflösung hier verschiedene Schwärzungsverschiebungen zur Folge haben kann, wurden die Messungen nur an gut getrennten Dubletten ausgeführt. Ebenso wichtig ist es, von den Messungen alle solchen Aufnahmen auszuschließen, die aus irgendeinem Anlaß einen Schleier zeigen. Variationen der kontinuierlichen Schwärzung sind schwer zu eliminieren; die Johannsche Methode ermöglicht es jedoch, diesen schädlichen Einfluß durch geeignete Anordnung des Brennflecks¹⁾ auf ein Minimum zu reduzieren. Die größte Fehlerquelle liegt in der Schwierigkeit, die Mittenblende des Kristallhalters genau einzustellen, woraus sich eine Unsicherheit über die Größe der Kristallöffnung ergibt. Wenn man bei der Justierung auf größte Schärfe an zwei Punkten des Rowland-Kreises einstellt, wird der berechnete Fokussierungsdefekt im Gebiet zwischen diesen beiden Punkten und seitlich derselben zu klein. Bei der hier behandelten Untersuchung war dieser Fehler so klein, daß er ganz vernachlässigt werden konnte. Mit Rücksicht auf die hier behandelten Fehlerquellen und die Fehler bei Vermessung der Photometerkurven dürfte man zu der Annahme berechtigt sein, daß der Fehler der Endwerte höchstens 10% beträgt.

Die Untersuchung umfaßt 75 Aufnahmen von $K\alpha$ -Dubletten der Elemente 22 Ti bis 30 Zn mit Quarz und Gips als Kristallen. Einige Beispiele dieser Aufnahmen sind in Fig. 4 wiedergegeben. Die Linien wurden im Siegbahnschen Photometer mit 50facher Abszissenvergrößerung photometriert. Die Fig. 5 und 6 geben einige Photometerkurven mit 10facher Abszissenvergrößerung wieder.

Es zeigte sich, daß $2H_M$ auf 0,005 mm genau erhalten werden konnte. Die Werte von H_E in Gleichung (1) wurden nach Gleichung (7) und (8)

¹⁾ Arne Sandström, Erste Mitteilung, S. 543.

in Siegbahn, Spektroskopie der Röntgenstrahlen¹⁾, berechnet. Die Kristallöffnung betrug 15 mm, der Kristallradius 1000 mm. Die Höhe des Brennflecks war durch die Blende auf 1,5 mm begrenzt. Die Dicke der photographischen Schicht wurde im Mikroskop gemessen; sie betrug 0,028 mm. Die gefundenen Halbwertsbreiten (in X-E.) sind in Tabelle 1 für Gips und in Tabelle 2 für Quarz zusammengestellt.

Tabelle 1. Halbwertsbreiten in X-E. mit Gips.

	3. Ordnung	4. Ordnung	5. Ordnung	6. Ordnung	7. Ordnung	Mittelwert
Zn		0,30		0,27	0,28	0,28
Cu		0,35		0,32		0,34
Ni		0,38		0,34		0,36
Co	0,38		0,41			0,40
Fe	0,58		0,58			0,58
Mn	0,72					0,72
Cr	0,66	0,65				0,66
Va	0,65	0,69				0,67
Ti	0,72					0,72

Tabelle 2. Halbwertsbreiten in X-E. mit Quarz.

	2. Ordnung	3. Ordnung	4. Ordnung	Mittelwert
Zn	0,33	0,30	0,32	0,32
Cu	0,38	0,38		0,38
Ni	0,43	0,38		0,40
Co	0,49			0,49
Fe	0,56			0,56
Mn	0,73			0,73
Cr	0,61			0,61
Va	0,75			0,75

Aus den Tabellen ist zu entnehmen, daß die Übereinstimmung zufriedenstellend ist, und zwar nicht nur zwischen den verschiedenen Ordnungen, sondern auch zwischen den mit den verschiedenen Kristallen Gips und Quarz erhaltenen Werten. Die Werte für verschiedene Ordnungen bei demselben Element zeigen keinen systematischen Gang, der auf einen Einfluß der Mikrostruktur zurückgeführt werden könnte. Es wäre auch sehr unwahrscheinlich, daß die vierte Ordnung von Zn $K\alpha_1$ mit Gips so gute Übereinstimmung mit der vierten Ordnung mit Quarz zeigen würde, wenn sich die Mikrostruktur und die Behandlung der Kristallflächen bei der hier in Betracht kommenden Meßgenauigkeit zu erkennen geben würde.

¹⁾ Zweite Auflage, S. 20. Berlin 1931.

Der angewandte Gipskristall hatte eine natürliche Oberfläche und der Quarzkristall (von Steeg & Reuter, Dicke 0,5 mm) war sicher bearbeitet.

Tabelle 3 gibt einen Vergleich zwischen den hier erhaltenen Halbwertsbreiten und den Werten von Allison und von Parratt. Wie ersichtlich, ist die Übereinstimmung befriedigend. Die jetzt erhaltenen Werte sind allgemein höher, was vielleicht daher stammt, daß eine Bestimmung des Einflusses der mikrokristallinen Struktur unmöglich war. Jedenfalls ist die Übereinstimmung gut genug, um die folgende Aussage zu gestatten:

Tabelle 3.

	22 Ti	23 Va	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn
Konkavkristall	0,72	0,71	0,64	0,72	0,57	0,44	0,38	0,36	0,30
Doppelkristall (Allison)					0,50	0,41	0,32	0,29	0,26
Doppelkristall (Parratt)	0,62	0,58	0,55	0,55	0,51		0,36		

Die Intensitätsverteilung in der Verbreiterung der Spektrallinien, die wegen des Fokussierungsdefektes und des schrägen Einfalls des Strahlenbündels gegen die photographische Schicht entsteht, kann durch eine Kurve wiedergegeben werden, die näherungsweise Gaußsche Form besitzt.

Auflösung und Trennung. Die Nachteile des Fokussierungsdefektes bei Versuchen, dichte Liniengruppen aufzulösen, spielen keine so große Rolle, wie man früher annahm. Nur bei Kristallen mit solchen Qualitäten und mit ebenso kleiner oder noch kleinerer Gitterkonstante als Kakspat übertrifft der Fokussierungsdefekt die Verbreiterung durch den Kristallreflexionsbereich und die Dicke der photographischen Schicht (Kristallöffnung $\bar{o} = 15$ mm). Schon bei Quarz wird die Trennung dichtliegender Linien hauptsächlich durch die beiden letzteren Ursachen der Linienverbreiterung erschwert. Da jedoch die als Vorzug der Methode sich ergebende bedeutende Erhöhung der Intensität es ermöglicht, Aufnahmen in höheren Ordnungen zu machen, lassen sich die genannten Schwierigkeiten umgehen. Als Beispiel einer Aufnahme in der zweiten Ordnung wird in Fig. 7 die Photometerkurve einer Aufnahme der Ag $L\alpha$ -Gruppe in der zweiten Ordnung mit Gips als Kristall wiedergegeben (vgl. Fig. 10 in der ersten Mitteilung, S. 553).

Die Intensität. Der Umstand, daß sich eine große Anzahl Intensitätsverteilungen vom Typus der Fig. 3 zufolge der natürlichen Linienbreite und des Kristallreflexionsbereiches überdecken, hat zur Folge, daß es sich vom Intensitätsgesichtspunkt aus wirklich lohnt, die Kristallöffnung noch weiter zu erhöhen, auch nachdem die Verbreiterung der Linien die

Größe des photographischen Korns überschritten hat. Bei Versuchsaufnahmen mit verschiedenen Kristallöffnungen ergab sich, daß die Intensität bei 15 mm Kristallöffnung etwa sechsmal größer war als bei 3 mm Öffnung. Abgesehen von den Schwierigkeiten bei Beurteilung der Intensität spricht dieser Befund dafür, daß Proportionalität zwischen der Lichtstärke und der Größe der Kristallöffnung vorliegt. — Ein Vergleich mit der Lichtstärke bei einem Spektrographen mit Spalt ist schwieriger anzustellen. In diesem Zusammenhange sei bemerkt, daß sich die in der ersten Mitteilung an-

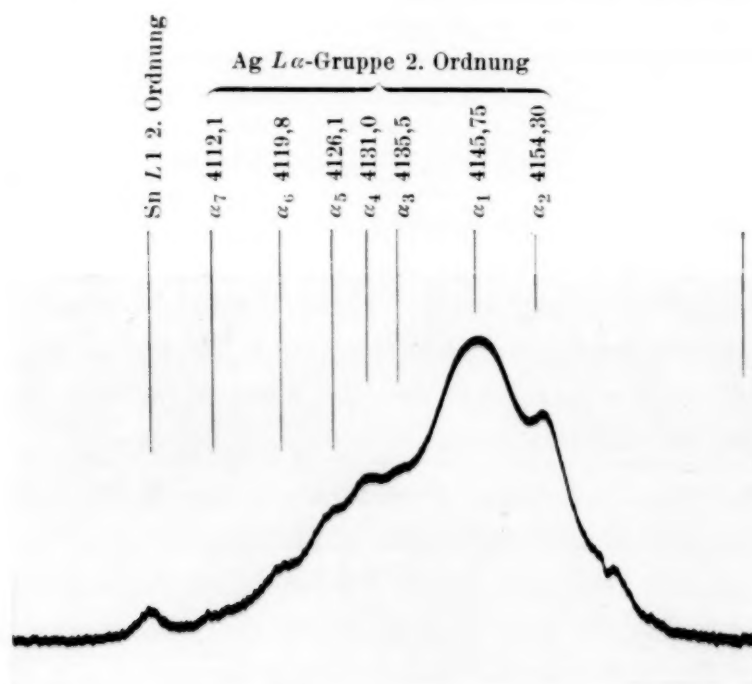


Fig. 7. Photometerkurve von der Ag L-Gruppe 2. Ordnung. Abszissenvergrößerung 5 mal. Rechts bewirken die Al $K\alpha$ -Linien eine Störung. Sie sind vom Al-Folium des Schutzfensters sekundär erhalten.

gegebenen Stromstärken auf einen verlängerten Brennfleck beziehen, der hinreichend groß ist, um ohne irgendwelche Verschiebung des Spektrographen gegen den Brennfleck ein 60 mm langes (oder mit dem ersten Apparat ein noch längeres) Spektrogramm zu geben.

Ich benutze die Gelegenheit, auch an diesem Orte meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Manne Siegbahn, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir die Werkstätte des hiesigen Instituts und deren Personal für den Bau der neuen Apparatur zur Verfügung stellte.

Uppsala, Physikalisches Institut der Universität, November 1934.

Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen.

Von **W. Lenz** in Hamburg.

(Eingegangen am 17. Oktober 1934.)

In Vereinfachung des Problems der Beugung von Molekularstrahlen an Kristallen wird die Beugung an einer starren periodisch gewellten Fläche betrachtet (§ 1) und eine strenge, aber meist unhandliche Reyleighsche Behandlungsweise durch zwei Näherungsverfahren ersetzt: eine hier nur skizzierte¹⁾ geometrisch-optische Methode (§ 2) und insbesondere eine weiterführende, auf der Anwendung des Huygensschen Prinzips beruhende Methode, bei der das Verhalten der Welle unmittelbar an der Oberfläche als Superposition der einfallenden und der an der betreffenden Stelle regulär reflektiert gedachten Welle beschrieben wird (§ 3); Endformel (9) und (10). Der Vergleich mit einem nach Rayleigh durchführbaren Sonderfall erweist sehr gute Brauchbarkeit des Verfahrens für die bei Molekularstrahlversuchen in Frage kommenden Fälle (§ 4), ohne wie die Rayleigh-Methode unhandlich zu werden.

§ 1. Problemstellung. Die folgenden Betrachtungen sind angeregt worden durch die Experimente von O. Stern über die Reflexion und Beugung von Molekularstrahlen an Kristalloberflächen. Als „Kristalloberfläche“ wird dabei definiert der Ort, an dem der Schwerpunkt des auftreffenden Strahlmoleküls in das Gebiet steilen — der Einfachheit halber hier unendlich steil gedachten — Potentialanstiegs eintritt. Die Gestalt dieser Fläche ist bedingt durch die Größe und Anordnung der die Kristalloberfläche bildenden Atome und der auftreffenden Moleküle. Es wird also diese Fläche im allgemeinen bei demselben Kristall von der Beschaffenheit der auftreffenden Strahlmoleküle abhängen. Es wird nun ferner der Einfachheit halber angenommen, daß die Kristalloberfläche als starr angesehen werden darf, daß also sowohl von der Veränderlichkeit infolge der Wärmebewegung als auch von der Energie-Impulsübertragung vom Molekularstrahl auf die Kristallatome abgesehen werden kann²⁾. In Wirklichkeit scheint allerdings diese Wechselwirkung durchaus, und vielleicht wesentlich, ins Spiel zu kommen, denn unter den soeben charakterisierten Annahmen ist eine Erklärung aller derjenigen experimentell gefundenen Intensitätsänderungen des reflektierten Strahls nicht möglich, die bei sonst gleicher Anordnung dadurch entstehen, daß die Kristalloberfläche in sich gedreht wird; denn für den reflektierten Strahl ändert sich hierbei die (stets Null betragende) Phasendifferenz der einzelnen Streustrahlen nicht. Infolgedessen können die folgenden Über-

¹⁾ Durchgeführt in der anschließend abgedruckten Arbeit von E. Brandt.

— ²⁾ Eine Berücksichtigung dieses Umstandes soll in einer späteren Arbeit erfolgen.

legungen nicht unmittelbar auf die Sternschen Experimente Anwendung finden; sie stellen nur mehr eine Vorstufe zu deren Erklärung dar. Aber auch unabhängig von diesen Experimenten scheinen sie mir allgemein-optisch von Interesse zu sein.

Es handelt sich also unter den vorgenommenen Idealisierungen um die Beugung von Wellen an einer undurchdringlichen, vollkommen reflektierenden Oberfläche $z = f(x, y)$. Denkt man an einen Kristall mit kubischem Gitter, z. B. NaCl oder LiF, und ist $2d$ der kleinste Abstand gleicher Atome, so gilt $f(x + 2n_1d, y + 2n_2d) = f(x, y)$, wenn n_1 und n_2 ganze Zahlen bedeuten¹⁾. Wollte man im Elementargebiet nun jede beliebige Gestalt von $f(x, y)$ zulassen, so wäre die Behandlung des Problems ungemein kompliziert, und die Fragestellung würde sich weit entfernen von dem eigentlichen Ausgangspunkt, den Verhältnissen bei den Sternschen Experimenten. Trifft nämlich ein He- oder ein Hg-Atom auf die Oberfläche des LiF-Kristalls, so muß das Atom als groß betrachtet werden gegen die Ionen des Kristalls, und infolgedessen muß die nach der obigen Definition zu konstruierende Kristalloberfläche als sanft gewellt gedacht werden, so daß der Unterschied in den z -Werten für den höchsten und tiefsten Punkt der Fläche wohl nicht mehr als $d/3$, wahrscheinlich aber wesentlich weniger betragen wird. Deshalb wird im folgenden in der Hauptsache an sanft gewellte Oberflächen gedacht.

Naturgemäß ist das Problem nur interessant für Wellenlängen λ , die mit der Gitterkonstante d vergleichbar sind. Auch hier jedoch können wir in Anlehnung an die Verhältnisse bei den Sternschen Experimenten eine Vereinfachung vornehmen und uns auf den Fall $\lambda/d \leq 1/5$ beschränken. Diese Einschränkung ist wesentlich für die Möglichkeit, Näherungsverfahren zu entwickeln, die es gestatten, für eine sanft gewellte, aber sonst beliebig gestaltete Oberfläche $z = f(x, y)$ die Intensitäten der Beugungsmaxima zu berechnen, falls eine ebene Welle bzw. ein Strahlenbündel von kleinem Öffnungswinkel auffällt. Vorausgesetzt, daß die hier gemachten Annahmen über die unendliche Steilheit des Potentialanstieges an der Oberfläche und deren Starrheit berechtigt sind, wäre es dann möglich, aus den beobachteten Beugungsintensitäten auf die Gestalt der Oberfläche Rückschlüsse zu ziehen.

§ 2. Methoden zur Behandlung des Beugungsproblems. Die nächstliegende Methode ist die der Integration der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ unter Erfüllung der Randbedingung an der Oberfläche. Sie ist von Rayleigh auf den Fall eines Strichgitters, also eines eindimensionalen Problems $z = f(x)$ angewendet worden. Die Fläche und die einfallende ebene Welle

¹⁾ Die Koordinatenachsen sind parallel den Kristallachsen gedacht.

werden unendlich ausgedehnt gedacht, so daß die gebeugte Welle angesetzt werden kann als Superposition ebener Wellen in den Richtungen, die durch die Fraunhoferschen Interferenzbedingungen $\alpha_n - \alpha = n \lambda/d$ usw. gegeben sind. Allerdings müssen hierbei auch die zu $\alpha_n > 1$ gehörenden imaginären Winkel mitberücksichtigt werden, die zu schnell abklingenden (inhomogenen) Wellen führen. Die Bestimmung der gebeugten Intensitäten gelingt indes nur für den Fall einer rein sinusförmig gefurchten Fläche $z = f(x) = a \cos \kappa x$, $\kappa = 2\pi/d$, sofern noch $a \ll d$. Diese Rayleighsche Methode ist in der folgenden Arbeit von E. Brandt insofern vervollkommenet worden, als sich durch einen Kunstgriff wesentlich schneller konvergierende Näherungsausdrücke für die Beugungsintensitäten angeben ließen. Bei Anwendung des Verfahrens auf beliebig gestaltete Oberflächen, z. B. schon für zwei Glieder einer Fourier-Entwicklung $f(x) = a_1 \cos \kappa x + a_2 \cos 2\kappa x$, scheint man indessen schon auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen. Deshalb sind im folgenden zwei bequemere Verfahren ausgearbeitet worden, die sich den Umstand zunutze machen, daß bei den Sternschen Experimenten $\lambda/d \leq 1/5$ ist.

Für so kleine Wellen liegt es nahe, als Ausgangspunkt die geometrische Optik zu benutzen. Hierin besteht das eine der beiden Verfahren. Die einfallende ebene, jetzt als Parallelstrahlgesamtheit aufzufassende Welle erfährt eine reguläre Reflexion an der gewellten Fläche. Die von jedem Element dieser Fläche reflektierte Strahlengesamtheit kann in größerer Entfernung praktisch als Kugelwelle betrachtet werden, und es bietet keinerlei Schwierigkeiten, die Amplitude bzw. Intensität dieser Kugelwelle in großer Entfernung aus der Gaußschen Krümmung des reflektierenden Oberflächenelements zu berechnen.

Wesentlich ist nun allerdings, daß bei der Superposition dieser reflektierten Wellen über die geometrische Optik hinausgehend die Besonderheit der Phasenverhältnisse beachtet wird. In die gleiche Richtung geschieht Reflexion sowohl an konvex als an konkav gewölbten Flächenelementen. Bei der Reflexion an den ersteren hat man es mit einem divergierenden, bei den letzteren jedoch mit einem zunächst konvergierenden Strahlenbündel zu tun, das erst nach Durchgang durch einen Brennpunkt bzw. zwei Brennpunkten in ein divergierendes Bündel übergeht. Nach Debye¹⁾ geschieht aber bei Durchgang durch eine Brennpunktlinie ein Phasensprung um $\pi/2$, also bei einem Brennpunkt bzw. zwei Brennpunkten, was in unserem Fall jeweils vorliegt, ein Sprung um π . Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält

¹⁾ Vgl. etwa M. v. Laue, Enc. d. Math. Wiss. V, 24, S. 439 ff.

man dann aus der Superposition der an den periodisch sich wiederholenden Stellen einer beliebigen Fläche $z = f(x, y)$ reflektierten Wellen die Intensität der „gebeugten“ Wellen, die natürlich ihre Maxima an den durch die Fraunhoferschen Bedingungen bestimmten Richtungen haben.

Es fragt sich nun, wie weit das so gewonnene Ergebnis eine brauchbare Näherung darstellt. Um dies zu prüfen, hat es in der folgenden Arbeit E. Brandt übernommen, die hier skizzierte Methode für den Fall der rein sinusförmig gewellten Oberfläche durchzurechnen und mit dem aus der vervollkommenen Rayleighschen Methode gewonnenen Ergebnis zu vergleichen. Es zeigt sich, daß die Übereinstimmung recht befriedigend ist, selbst für den Fall $\lambda/d = 1/5$, jedoch nur soweit diejenigen Maxima behandelt werden, die hinreichend weit von der Grenze des Winkelbereichs geometrisch-optischer Reflexionsmöglichkeiten liegen. Diese Grenze ist ja bedingt durch die maximale Neigung, die die Oberflächennormale mit dem Einfallswinkel besitzt. Darüber hinaus sind zwar wellentheoretisch Beugungsmaxima vorhanden, wenn auch an Intensität schnell abnehmend; geometrisch-optisch fehlen sie jedoch vollkommen, und es wird hieraus verständlich, daß auch schon in der Nähe dieser Grenze die Übereinstimmung mangelhaft wird.

Diese Methode ist zwar instruktiv und deshalb mitteilenswert, indem sie zeigt, wie das Beugungsproblem auf höchst primitive Weise nicht nur verständlich gemacht, sondern auch praktisch angenähert werden kann; ihre Anwendbarkeit ist zwar im Gegensatz zur Rayleighschen Methode an keine Bedingung bezüglich der Gestalt der Oberfläche $z = f(x, y)$ geknüpft, doch ist sie wegen des obengenannten Mangels verbesserungsbedürftig. Sie kann insofern als überholt gelten durch die folgende auf das Huyghenssche Prinzip sich stützende Methode, bei der die Wellenbewegung in der unmittelbaren Nähe jeder Stelle der Oberfläche als Superposition von einfallender und reflektierter Welle aufgefaßt, das Zusammenwirken dieser reflektierten Wellen aber nicht geometrisch-optisch verfolgt, sondern dem Prinzip entnommen wird.

§ 3. *Anwendung des Huyghensschen Prinzips.* Wenn u_P die Wellenfunktion am Aufpunkt P und r_{JP} , dessen Abstand von einem Element do_J der beugenden Oberfläche bedeutet, ferner $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl, dn das Längenelement der nach außen gerichteten Normalen und der Index J , daß die betreffenden Werte am Integrationspunkt der Oberfläche zu nehmen sind, so verlangt das Huyghenssche Prinzip bekanntlich:

$$4\pi u_P = \int \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_J \frac{e^{ikr_{PJ}}}{r_{PJ}} do_J - \int u_J \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr_{PJ}}}{r_{PJ}} do_J. \quad (1)$$

Nach obigem soll nun in der Nähe der Oberfläche die Wellenbewegung als Superposition einer ebenen einfallenden und reflektierten Welle betrachtet werden, wobei die erstere die Amplitude 1 und die letztere die komplexe Amplitude $A(\mathbf{r}_J)$ haben möge, indem durch das Argument \mathbf{r}_J angedeutet wird, daß diese Amplitude vom Ort \mathbf{r}_J auf der Oberfläche abhängig zu denken ist. Die beiden Vektoren $\mathbf{f} = k \cdot \mathbf{s}_0^{(e)}$ und $\mathbf{f}^{(r)} = k \mathbf{s}_0^{(r)}$ mögen die einfallende und die an der betreffenden Stelle \mathbf{r}_J reflektierte Welle charakterisieren. Dann ist im Sinne des Obigen in der Nähe dieser Stelle zu setzen:

$$u = e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r})} + A(\mathbf{r}_J) e^{i(\mathbf{f}^{(r)} \cdot \mathbf{r})}. \quad (2)$$

Wegen der Annahme vollkommener Reflexion an der Oberfläche ist dort $u = 0$ zu setzen, so daß aus (2) folgt:

$$A(\mathbf{r}_J) = - e^{i(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(r)}, \mathbf{r}_J)}. \quad (3)$$

Sei \mathbf{n}_0 der Einheitsvektor in der Normalenrichtung, dann findet man aus (2) ferner:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_J = i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_0) e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_J)} + i(\mathbf{f}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_0) A(\mathbf{r}_J) e^{i(\mathbf{f}^{(r)} \cdot \mathbf{r}_J)}.$$

Die Ortsveränderlichkeit von $A(\mathbf{r}_J)$ kann außer Betracht bleiben, weil die Differentiation normal zur Oberfläche erfolgt. Da wegen des Reflexionsgesetzes $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_0) = -(\mathbf{f}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_0)$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck mit Rücksicht auf (3) zu $2 i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_0) \exp. i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_J)$, und man erhält wegen $u_J = 0$ aus (1):

$$4\pi u_P = 2i \int (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_0) e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_J)} \cdot \frac{e^{ikr_{PJ}}}{r_{PJ}} d\sigma_J. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck kann seiner Herleitung entsprechend nur näherungsweise richtig sein. Man könnte ihn verbessern durch Berechnung der Werte u_P an Orten der Oberfläche, wo sich ja Null ergeben sollte; diese Werte könnte man in (1) einsetzen und in (2) berücksichtigen und dadurch einen neuen Ausdruck für u_P gewinnen usw. Viel bequemer ist es, die Gültigkeit von (4) ebenso wie die des geometrisch-optischen Verfahrens an dem von Rayleigh behandelten Sonderfall einer rein sinusförmig gewellten Oberfläche zu prüfen. Dies soll hier geschehen und zunächst für jede beliebige Oberflächengestalt $z = f(x, y)$ aus (4) der Ausdruck für die Amplitude bzw. Intensität der Wellenbewegung in großer Entfernung von der Oberfläche aufgestellt werden.

Es werde auf der Oberfläche ein Anfangspunkt gewählt und der jetzt in großer Entfernung befindliche Aufpunkt von diesem Punkt aus durch

$\Re = R \cdot \Re_0$ charakterisiert. Dann ist näherungsweise $r_{PJ} = R - (\Re_0 \mathbf{r}_J)$. Mit den Definitionen $k \Re_0 = \mathbf{f}^P$ und $d\mathbf{o}_J = d\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{o}_J$ entsteht dann aus (4):

$$4\pi u_P = 2i \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \int e^{i(\mathbf{t} - \mathbf{f}^P, \mathbf{r}_J)} (\mathbf{f} d\mathbf{o}_J). \quad (5)$$

Die allgemeinste Form einer periodisch gewellten Oberfläche führt zu der folgenden Beziehung zwischen dem Ort \mathbf{r}_E in dem den Anfangspunkt enthaltenden Elementargebiet und einem entsprechend gelegenen Punkt eines beliebigen anderen Elementargebietes:

$$\mathbf{r}_J = \mathbf{r}_E + \mathbf{a}_0 \cdot \mu \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}_0 \cdot \nu \cdot \mathbf{b}, \quad (6)$$

wo \mathbf{a}_0 und \mathbf{b}_0 zwei irgendwie in der xy -Ebene gelegene, den Kanten des Elementargebietes parallele Einheitsvektoren sind, und \mathbf{a} und \mathbf{b} die kleinsten Abstände homologer Punkte in diesen Richtungen und μ und ν ganze Zahlen bedeuten. Die gesamte Fläche möge $M \cdot N$ Elementargebiete enthalten, und es sei abkürzungsweise gesetzt:

$$F_M(\xi) = \frac{e^{iM\xi} - 1}{e^{i\xi} - 1} = e^{i\frac{M-1}{2}\xi} \cdot \frac{\sin \frac{M}{2}\xi}{\sin \frac{\xi}{2}}. \quad (7)$$

Dann entsteht aus (5) mit Rücksicht auf (6):

$$\left. \begin{aligned} 4\pi u_P &= 2i \frac{e^{ikR}}{R} \cdot F_M \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}^P, \mathbf{a}_0) \mathbf{a}\} \cdot F_N \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}^P, \mathbf{b}_0) \mathbf{b}\} \cdot O, \\ O &= \int_{(E)} e^{i(\mathbf{t} - \mathbf{f}^P, \mathbf{r}_J)} (\mathbf{f} d\mathbf{o}_E), \end{aligned} \right\} (8a, b)$$

wobei die Integration also jetzt nur über ein einziges Elementargebiet zu erstrecken ist. Die F -Faktoren heben in bekannter Weise die Fraunhofer'schen Maxima heraus. Praktisch kommt nun nicht das einzelne Hauptmaximum zur Beobachtung, sondern das Integral über dieses mitsamt der Nebenmaxima. Dies bedingt eine Integration des Quadrats des Absolutwertes von (8) über einen engen, um das betreffende Hauptmaximum herumliegenden Winkelraum. Der Einfachheit halber sei $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{d}$ und $\mathbf{a}_0 = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{j}$, also parallel den xy -Koordinatenrichtungen, dann ist der Winkelraum durch $d\alpha d\beta/d\gamma$ darstellbar, und eine einfache Integration über die F -Quadrate liefert den vor dem folgenden Ausdruck stehenden Faktor und die Gesamtintensität des betreffenden Maximums, reduziert auf die Einheitsentfernung $R = 1$ vom Anfangspunkt der beugenden Oberfläche, wird:

$$I_{pq} = \frac{M \cdot N}{\gamma_{pq}} \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \right)^2 \cdot O_{pq} \cdot O_{pq}^*, \quad (9)$$

wenn O^* das konjugiert Komplexe des Ausdrucks (8b) bedeutet und das betreffende Maximum durch die ganzen Zahlen p und q in den Fraunhoferschen Bedingungen

$$\alpha - \alpha_{pq} = p \lambda / d, \quad \beta - \beta_{pq} = q \lambda / d$$

charakterisiert ist. Unter Einführung dieser Interferenzbedingungen in (8b) ergibt sich dann mit Rücksicht darauf, daß aus $z = f(x, y)$ ersichtlich $(f d \mathbf{O}_E) = \{ \mathbf{f}_z - \mathbf{f}_x f_x - \mathbf{f}_y f_y \} dx dy = k (\gamma - \alpha f_x - \beta f_y) dx dy$ für den Ausdruck O_{pq} in (9):

$$O_{pq} = k \int_0^d e^{i \frac{2\pi}{d} (px + qy) + i (\gamma - \gamma_{pq}) k f(x, y)} \cdot \{ \gamma - \alpha f_x - \beta f_y \} dx dy. \quad (10)$$

Aus (9) mit (10) wären für beliebige Oberflächen $z = f(x, y)$ die gesuchten Beugungsintensitäten zu gewinnen. Die Ausführung dieser Integration könnte bei gewissen versuchsweise gemachten Annahmen über $f(x, y)$ numerisch erfolgen, oder aber nach einer an das Folgende anschließenden Methode.

§ 4. Durchführung für einen Sonderfall. Um entsprechend dem Obigen ein Urteil über die Brauchbarkeit der vorstehend entwickelten Methode zu gewinnen, soll unter Einführung einer sogleich zu besprechenden Zahl ε gesetzt werden:

$$f(x, y) = \varepsilon d \left\{ \cos 2\pi \frac{x}{d} + \cos 2\pi \frac{y}{d} \right\}, \quad (11)$$

da dieser Fall nach der Rayleighschen Methode durchgeführt und mit deren Ergebnis verglichen werden kann. Da nach (11) der Höhenunterschied des höchsten und tiefsten Punktes der beugenden Oberfläche gleich $4\varepsilon d$ ist und dieser Betrag für auftreffende He-Atome und LiF als Kristall höchstens zu $d/3$ zu schätzen ist, so wird hier, wie übrigens auch im allgemeinen, ε zwischen $1/10$ und $1/20$ liegen.

Unter Einführung neuer Variabler $\xi = 2\pi x/d$, $\eta = 2\pi y/d$ und mit der Abkürzung:

$$s_{pq} = (\gamma - \gamma_{pq}) k \varepsilon d \quad (12)$$

entsteht aus (10):

$$O_{pq} = k \left(\frac{d}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} e^{i(p\xi + q\eta) + i s_{pq} (\cos \xi + \cos \eta)} \cdot \{ \gamma + 2\pi \varepsilon (\alpha \sin \xi + \beta \sin \eta) \} d\xi d\eta,$$

was mittels der Besselschen Funktionen J_n leicht übergeführt werden kann in:

$$O_{pq} = (i)^{p+q} \cdot k d^2 \left\{ \gamma + \frac{2\pi\epsilon}{s_{pq}} (\alpha p + \beta q) \right\} J_p(s_{pq}) J_q(s_{pq}). \quad (13)$$

Da nach (12) und den Interferenzbedingungen $2\pi\epsilon p/s_{pq} = (\alpha - \alpha_{pq})/(\gamma - \gamma_{pq})$, so empfiehlt es sich, die $\{ \}$ auf den Nenner $\gamma - \gamma_{pq}$ zu bringen, so daß man im Zähler $\alpha(\alpha - \alpha_{pq}) + + = 1 - \alpha\alpha_{pq} - \beta\beta_{pq} - \gamma\gamma_{pq}$ behält; bei rein formaler Vertauschung von Einfall- und Beugungsrichtung ändert sich also nur das Vorzeichen des Nenners und man erhält die Identität:

$$-\left\{ \gamma + \frac{2\pi\epsilon}{s_{pq}} (\alpha p + \beta q) \right\} = \gamma_{pq} \left\{ 1 + \sigma_1 \frac{p}{s_{pq}} + \sigma_2 \frac{q}{s_{pq}} \right\}, \quad (14)$$

$$\sigma_1 = 2\pi\epsilon \frac{\alpha_{pq}}{\gamma_{pq}}, \quad \sigma_2 = 2\pi\epsilon \frac{\beta_{pq}}{\gamma_{pq}}. \quad (14a)$$

Einsetzen von (14) in (13) und (13) in (9) liefert endlich für die Intensität:

$$I_{pq} = MN d^2 \cdot \gamma_{pq} \left\{ 1 + \sigma_1 \frac{p}{s_{pq}} + \sigma_2 \frac{q}{s_{pq}} \right\}^2 \cdot J_p^2(s_{pq}) J_q^2(s_{pq}). \quad (15)$$

Die Rayleighsche Methode führt zu dem gleichen Ausdruck¹⁾, nur ist statt $\sigma_{1,2}$ zu setzen:

$$\Delta_1 = s_{pq} - s_{p+1,q}, \quad \Delta_2 = s_{pq} - s_{p,q+1} \quad (15a)$$

und zu fordern, daß die $\{ \}$ in (15) sich nur wenig von 1 unterscheidet. In nullter Näherung ist also die Übereinstimmung vollkommen. Aber auch in erster Näherung ergibt sich gute Übereinstimmung solange so viele Maxima vorhanden sind, daß z. B. die Differenz der α -Werte benachbarter Maxima klein ist gegen diesen Wert selbst, also $\alpha_{p+1,q} - \alpha_{p,q} \ll \alpha_{pq}$. Denn dann ist nach (15a) und (12) unter Fortlassung der Indizes und unter Anwendung der Interferenzbedingungen auf $\Delta\alpha$:

$$\Delta_1 = \frac{\partial s}{\partial \alpha} \Delta\alpha = k\epsilon d \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\lambda}{d} = 2\pi\epsilon \frac{\alpha}{\gamma} = \sigma_1$$

in Übereinstimmung mit (14a) bzw. (15); analog gilt dann $\Delta_2 = \sigma_2$.

Wie weit die Übereinstimmung in erster Näherung geht, wenn die soeben gemachte Voraussetzung vieler Maxima nicht gilt, ist schwer zu übersehen, da dann die Rayleighsche Methode unübersichtlich wird. Im Sternschen Fall $\lambda/d \leq 1/5$ liegen immer so viele Maxima vor, daß (15) mit (14a) eine vollkommen ausreichende Näherung darstellt.

¹⁾ Vgl. (2, 27), (2, 25) und (2, 22) der folgenden Arbeit von E. Brandt.

Da (9) mit (10) nicht von der Gestalt der Oberfläche abhängt, darf man hiernach die angenäherte Gültigkeit dieser Ausdrücke auch für nicht sinusförmig gewellte Oberflächen annehmen. Allerdings wird es notwendig sein, sich auf sanft gewellte Oberflächen zu beschränken, da sonst der einfache Ansatz (2) nicht mehr zulässig sein wird, indem die Oberfläche auf die Ausdehnung einer Wellenlänge auch nicht mehr näherungsweise als eben betrachtet werden kann; es kommen z. B. Schattenwirkungen an der Oberfläche selbst in Frage, die die Anwendung von (2) unmöglich machen, weil dann hier schon Beugungen wesentlich ins Spiel treten. Leider stößt, wie schon bemerkt, die Berechnung von u_p nach (4) für Punkte der Oberfläche selbst auf so große rechnerische Schwierigkeiten, daß die Angabe von scharfen Kriterien für die Anwendbarkeit der hier entwickelten Methoden äußerst umständlich wird. Für die bei der Reflexion und Beugung von Molekularstrahlen in Frage kommenden Verhältnisse dürfte jedoch die hier angegebene Methode durchaus genügen.

Das in (11) bis (15) benutzte Verfahren läßt sich ausdehnen auf den Fall einer allgemeineren Form von $f(x, y)$, nämlich:

$$f(x, y) = a_{10} \sin 2\pi \frac{x}{d} + a_{01} \sin 2\pi \frac{y}{d} + f_1(x, y),$$

$$f_1(x, y) = \sum_{\substack{m, n \neq 0 \\ -\infty \\ +\infty}} a_{mn} \sin \frac{2\pi}{d} (mx + ny + \vartheta_{mn}),$$

wenn kf_1 im ganzen Integrationsgebiet als klein gegen 1 angesehen werden darf; leider ist diese Bedingung erst nachträglich prüfbar. Dann kann nämlich $\exp. ikf_1$ in eine Reihe entwickelt werden, von der man sich auf das erste Glied beschränken mag, und es bietet dann keinerlei Schwierigkeiten, die Integrale (10) durch Besselsche Funktionen auszudrücken. Man erhält dann nach (9) die Intensitäten als Funktionen der a_{mn} und $\alpha\beta\gamma$ und kann aus den gemessenen Intensitäten und Winkeln die a_{mn} berechnen. Es könnte dabei allerdings vorkommen, daß selbst bei Gültigkeit unserer Annahmen über die Starrheit der Kristalloberfläche, die Intensitäten durch die gefundene Endformel nicht darstellbar sind, da ja die neue Voraussetzung $kf_1 \ll 1$ nicht erfüllt zu sein braucht. Deshalb erscheint es geraten und wohl auch rechnerisch nicht wesentlich komplizierter, (10) unter Zugrundelegung einer plausiblen Form von $f(x, y)$ numerisch zu integrieren und durch kleine Abänderungen von $f(x, y)$ die Übereinstimmung zu erzielen.

Geometrisch-optische und wellentheoretische Methode zur Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen.

Von **E. Brandt** in Berlin.

(Eingegangen am 17. Oktober 1934.)

Es wird die in § 2 der vorstehenden Arbeit von W. Lenz skizzierte geometrisch-optische Methode durchgeführt (Kap. I) und mit dem nach Rayleigh wellentheoretisch durchführbaren Sonderfall sinusförmig gewellter Gitteroberflächen auf ihre Brauchbarkeit verglichen (Kap. III). Das Rayleighsche Verfahren wird dabei vervollständigt (Kap. II), und es werden praktische Näherungslösungen angegeben. Die Übereinstimmung erweist sich innerhalb der zu Beginn von Kap. III angegebenen Bedingungen als vollkommen.

Einleitung. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Durchführung der in der vorangehenden Arbeit von W. Lenz in § 2 angegebenen geometrisch-optischen Methode zur Behandlung der Beugung von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. Diese besteht im wesentlichen darin, daß die einfallende ebene, als Parallelstrahlengesamtheit aufzufassende Welle an der gewellten Oberfläche eine reguläre Reflexion erfährt. Man betrachtet die von jedem Element dieser Fläche reflektierte Strahlengesamtheit in großer Entfernung als Kugelwelle und kann somit deren Amplitude bzw. Intensität aus der Gaußschen Krümmung des reflektierenden Oberflächenelementes berechnen. Über die geometrische Optik hinausgehend sind jedoch die Phasenverhältnisse zu beachten, weil sowohl konvex wie konkav gewölbte Oberflächenelemente in die gleiche Richtung reflektieren. Da die an den letzteren reflektierten Strahlenbündel Brennpunkte, bzw. Brennpunkte zu passieren haben, erleiden sie nach Debye Phasensprünge um $\pi/2$ bzw. π . Superponiert man, unter Berücksichtigung dieser Phasensprünge, die an den periodisch sich wiederholenden Stellen der gewellten Oberfläche reflektierten Wellen, so erhält man die Intensität der „gebeugten“ Welle, deren Maxima in den durch die Fraunhoferschen Bedingungen bestimmten Richtungen liegen.

Zur Prüfung der Brauchbarkeit dieser Methode wird für den Sonderfall der sinusförmig gewellten Oberfläche ein hierfür von Rayleigh angegebenes wellentheoretisches Verfahren vervollkommen. Leider ist die wellentheoretische Behandlungsweise nicht auf beliebige Oberflächengestalt ausdehnbar, während die hier zu entwickelnde geometrisch-optische Methode auf beliebige Gestalt der Gitteroberfläche anwendbar ist. Um die Güte

und die Anwendbarkeit des geometrisch-optischen Verfahrens näher zu prüfen, wurden außerdem in einigen Sonderfällen allgemeine und zahlenmäßige Vergleiche zwischen den beiden Methoden angestellt, die innerhalb gewisser, zu Beginn von Kapitel III angegebener Grenzen eine vollkommene Übereinstimmung ergaben.

I. Geometrisch-optische Methode.

§ 1. Allgemeiner eindimensionaler Fall. Es werde zunächst der Reflexionsvorgang eines parallelen Strahlenbündels an einer eindimensional gewellten Oberfläche untersucht, was dem Fall eines Strichgitters entspricht. Die Oberfläche sei gegeben durch

$$z = f(x) \quad \text{oder} \quad F(x, z) = f(x) - z = 0, \quad (1, 1)$$

wo $f(x)$ eine in x periodische Funktion mit der Furchenlänge (Gitterkonstanten) a darstellen soll. Der Einfachheit halber seien in der Folge alle auftretenden Längen in der Einheit a gemessen. Die Furchen laufen nach diesem Ansatz parallel zur y -Achse, und die x - z -Ebene hat mit der gewellten Oberfläche die in (1, 1) gegebene Schnittkurve.

Nun möge aus einer beliebigen, in der x - z -Ebene liegenden Richtung (Richtungskosinus: α, γ) ein paralleles Strahlenbündel auf die Oberfläche auffallen und an einem Oberflächenpunkt x_0, y_0 reflektiert werden (Richtungskosinus α', γ'). Dann ist der Einheitsvektor in der Einfalls- bzw. Reflexionsrichtung:

$$\mathbf{e}^0 = \alpha \cdot \mathbf{i} + \gamma \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}^0 = \alpha' \cdot \mathbf{i} + \gamma' \cdot \mathbf{k}, \quad (1, 2)$$

wenn wir die Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen mit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bezeichnen.

Der Einheitsvektor der Normalen zur Oberfläche ist

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{f'}{n} \mathbf{i} - \frac{1}{n} \mathbf{k} \quad \text{mit} \quad n = (f'^2 + 1)^{1/2}. \quad (1, 3)$$

Zwischen \mathbf{r}^0 , \mathbf{e}^0 und \mathbf{n}^0 besteht nach dem Reflexionsgesetz folgende Beziehung:

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{e}^0 - 2 \mathbf{n}^0 (\mathbf{e}^0 \mathbf{n}^0). \quad (1, 4)$$

Sei ds ein Element auf dem Schnitt (1, 1) und ϱ der Krümmungsradius an der betreffenden Stelle, so übersieht man leicht, daß der Öffnungswinkel $d\omega$ der auf ds reflektierten Strahlen:

$$d\omega = 2 \frac{ds}{\varrho}. \quad (1, 5)$$

Man definiere jetzt die Intensität i pro Winkeleinheit. Ferner nehme man an, daß das einfallende parallele Strahlenbündel die Flächenintensität $I = 1$ habe. Sei jetzt der Querschnitt eines zu betrachtenden parallel einfallenden Strahlenbündels $\Delta q = \Delta s (\mathbf{e}^0 \mathbf{n}^0) = 1$, dann wird für unser reflektiertes Bündel

$$i = \frac{1}{|\Delta \omega|} = \left| \frac{\varrho}{2} (\mathbf{e}^0 \mathbf{n}^0) \right|. \quad (1, 6)$$

Nunmehr soll noch i ausgedrückt werden durch die Furchenform $f(x) = z$ und die Richtungskosinus der Einfalls- bzw. Reflexionswinkel.

Aus (1, 4) können wir einen einfachen Ausdruck für n^2 herleiten, wenn wir $\mathbf{n} = n \cdot \mathbf{n}_0$ einführen und z. B. folgende Komponentengleichung betrachten:

$$\gamma' = \gamma + \frac{2}{n} (\mathbf{e}^0 \mathbf{n}^0), \quad \text{d. h.} \quad n^2 = \frac{2 (\mathbf{e}^0 \mathbf{n})}{\gamma' - \gamma}. \quad (1, 7)$$

Wegen $\varrho = n^3/f''$ wird damit aus (1, 6):

$$i = \frac{(\mathbf{e}^0 \mathbf{n})^2}{|(\gamma' - \gamma) f''|} = \frac{(\alpha f' - \gamma)^2}{|(\gamma' - \gamma) f''|}. \quad (1, 8)$$

Bisher haben wir aber nur die Intensität bestimmt, die von einem einzelnen, geeigneten Oberflächenpunkt in eine feste Richtung reflektiert wird. Im allgemeinen wird es jedoch schon in einem Elementarbereich mehrere diskrete Punkte $(x_0, z_0), \dots (x_m, z_m)$ geben, die die gleiche Normalenrichtung haben, also in die gleiche Richtung reflektieren. Diese Reflexionsstrahlen sollen im Unendlichen, oder praktisch in einem Aufpunkt, dessen Abstand sehr groß ist gegen die Ausmaße der Oberfläche, interferieren. Zu diesem Zweck ist die einfallende bzw. reflektierte Strahlen-gesamtheit als Welle aufzufassen, und zwar als ebene einfallende und als reflektierte Zylinderwelle mit der „Amplitude pro Winkeleinheit“ $A^* = \sqrt{i}$, die in der Folge als reduzierte Amplitude bezeichnet wird.

Für die optische Wegdifferenz $d^{(\mu)}$ bzw. die zugehörige Phasendifferenz des μ -ten gegen den nullten Reflexionsstrahl ergibt sich in bekannter Weise:

$$\left. \begin{aligned} d^{(\mu)} &= (\alpha' - \alpha) (x_\mu - x_0) + (\gamma' - \gamma) (z_\mu - z_0); \\ \delta^{(\mu)} &= k \cdot d^{(\mu)}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1, 9)$$

Man erhält demnach für die reduzierte Gesamtamplitude aller von einer ganzen Einzelfurche in die Richtung (α', γ') reflektierten Strahlen

$$A^* = \sum_0^m \sqrt{i_\mu} e^{i k d^{(\mu)}}. \quad (1, 10)$$

Bei der Berechnung der Phasendifferenzen hat man noch darauf zu achten, ob der betrachtete Strahl vor der Interferenz eine Brennpunktlinie passiert hat. In diesem Falle erleidet er nämlich nach Debye¹⁾ den Phasensprung $\pi/2$.

Die Oberfläche habe $N + 1$ Furchen; da die Phasendifferenz der ν -ten gegen die 0-te Furche gleich $\nu\delta$, so ergibt sich für die reduzierte Gesamtamplitude:

$$|A^*| \sum_{\nu=0}^N e^{i\nu\delta} = |A^*| \frac{1 - e^{i(N+1)\delta}}{1 - e^{i\delta}} = |A^*| e^{i\frac{N}{2}\delta} \cdot \frac{\sin \frac{(N+1)\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

und somit für die Gesamtintensität pro Winkeleinheit

$$i = |A^*|^2 \frac{\sin^2 \frac{(N+1)\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (1, 11)$$

Bei den vorliegenden Experimenten, und auch bei der zum Vergleich heranzuziehenden Rayleighschen wellentheoretischen Methode kommt jeweils nur die gesamte in ein Hauptmaximum einschließlich der Nebenmaxima gestrahlte Intensität in Frage. Deshalb ist in (1, 11) noch über den Bereich $d\varphi'$ des p -ten Hauptmaximums zu integrieren, dessen Lage durch die Fraunhoferschen Bedingungen gegeben ist, nämlich

$$\delta_p = k(\alpha' - \alpha) = p \cdot 2\pi, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_p - \alpha = p \cdot \lambda \quad (p = \text{ganze Zahl}). \quad (1, 12)$$

Hiernach ist also (1, 11) über den zu $\Delta\alpha' = 2\pi/k$ gehörigen Winkelraum, d. h. genauer von $\alpha' = \alpha_p - \frac{\pi}{k}$ bis $\alpha' = \alpha_p + \frac{\pi}{k}$ zu integrieren, um die Gesamtintensität I_p zu erhalten. Setzt man vorübergehend $\alpha' = \cos \varphi'$, so ist $d\varphi' = (d\alpha')/\gamma'$ und man erhält

$$I_p = \frac{|A_p^*|^2}{\gamma_p} \int_{\alpha' - \frac{\pi}{k}}^{\alpha' + \frac{\pi}{k}} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} d\alpha'. \quad (1, 13 a)$$

γ_p konnte hierbei vor das Integral gezogen werden, da sich sein Wert in dem betrachteten Winkelraum nur unwesentlich ändert.

¹⁾ Vgl. Encyklopädie d. Math. Wiss. V, 24, S. 439 (Artikel v. Laue, Wellenoptik).

Mit der Abkürzung $N\delta = 2\Theta$ wird wegen $k d\alpha' = d\delta$ aus dem Integral bei großem N ohne wesentlichen Fehler

$$\frac{2N}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \Theta}{\Theta^2} d\Theta.$$

Der Wert des letzten Integrals ist aber π , so daß sich schließlich ergibt:

$$I_p = \frac{2\pi}{k \cdot \gamma_p} |A_p^*|^2 \cdot N = \frac{\lambda}{\gamma_p} |A_p^*|^2 \cdot N. \quad (1, 13)$$

Diese Formel gestattet es uns also, die Gesamtintensität, die durch Reflexion in das p -te Maximum hineingeht, unter Zuhilfenahme von (1, 10), (1, 9) und (1, 8), für eine beliebige einfach periodische Oberfläche von der Gestalt $z = f(x)$ zu berechnen.

§ 2. *Allgemeiner zweidimensionaler Fall.* Die Oberfläche sei, einem Kreuzgitter entsprechend, doppelt periodisch in x und y mit der in beiden Achsenrichtungen gleichen Periodenlänge (Gitterkonstanten) a , die wiederum als Maßstabeinheit dienen soll. Die Oberflächengleichung habe die Form

$$z = f(x, y) \quad \text{oder} \quad F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0, \quad (1, 14)$$

wobei $f(x, y)$ eine in x und y periodische Funktion sei. Die Einheitsvektoren des Einfall- und Reflexionsstrahls seien:

$$\mathbf{e}^0 = \alpha \cdot \mathbf{i} + \beta \cdot \mathbf{j} + \gamma \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}^0 = \alpha' \cdot \mathbf{i} + \beta' \cdot \mathbf{j} + \gamma' \cdot \mathbf{k}.$$

Für den Einheitsvektor der Normalen findet man:

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{f'_x}{n} \mathbf{i} + \frac{f'_y}{n} \mathbf{j} - \frac{1}{n} \mathbf{k}; \quad \text{mit } n = (f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{1/2}, \quad (1, 15)$$

wobei selbstverständlich die Ableitungen für den betrachteten Oberflächenpunkt $x = x_0$, $y = y_0$ zu nehmen sind.

Sei do ein Element der Oberfläche und K die Gaußsche Krümmung an der betreffenden Stelle, so findet man nach kurzer Rechnung¹⁾, daß der räumliche Öffnungswinkel $d\Omega$ der von do reflektierten Strahlen

$$d\Omega = 4K do (\mathbf{e}^0 \mathbf{n}^0) \quad (1, 6)$$

¹⁾ Zwischen \mathbf{e}^0 , \mathbf{r}^0 und dem Normaleinheitsvektor \mathbf{n}^0 besteht wieder die Reflexionsbeziehung (1, 4) und es folgt im zweidimensionalen Fall beim Fortschreiten um ds_1 bzw. ds_2 in den beiden Hauptschnitten mit den Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 und Tangentenrichtungen $\mathbf{s}_{1,2}^0$ für die Änderungen der Normalenrichtungen

$$d\mathbf{n}_{1,2}^0 = \mathbf{s}_{1,2}^0 \frac{ds_{1,2}}{\varrho_{1,2}}.$$

ist. Sei jetzt wieder der Querschnitt des Einfallsbündels $\Delta q = \Delta o(e^0 n^0) = 1$, dann erhalten wir für die Reflexionsintensität i pro räumliche Winkereinheit, da diese dem Öffnungswinkel umgekehrt proportional ist:

$$i = \frac{1}{|\Delta \Omega|} = \frac{1}{|4K|}. \quad (1, 16)$$

Im Ausdruck für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$K = (f''_x f''_y - f''_{xy})/n^4$$

kann die auch im zweidimensionalen Falle geltende Beziehung (1, 7) für n^2 eingeführt und aus (1, 16) mit (1, 15) gefunden werden:

$$i = \frac{(e^0 n^0)^2}{(\gamma' - \gamma)^2 |f''_x f''_y - f''_{xy}|} = \frac{(\alpha f'_x + \beta f'_y - \gamma)^2}{(\gamma' - \gamma)^2 |f''_x f''_y - f''_{xy}|}. \quad (1, 17)$$

Für die resultierende Amplitude pro Elementarbereich gilt wie im eindimensionalen Falle (1, 10), wobei abgesehen von den Phasensprüngen, in (1, 9) das Glied $(\beta' - \beta)(y_\mu - y_0)$ hinzuzufügen ist. Für die Summation über die $M + 1$ Einheiten in der x -Richtung und die $N + 1$ Einheiten in der y -Richtung erhalten wir

$$i = |A^*|^2 \frac{\sin^2 \frac{M \delta^{(x)}}{2}}{\sin^2 \frac{\delta^{(x)}}{2}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N \delta^{(y)}}{2}}{\sin^2 \frac{\delta^{(y)}}{2}} \quad (1, 18)$$

Es ergibt sich jetzt für die Richtungsänderungen der Reflexionsstrahlen

$$d \mathbf{r}_{1,2}^0 = -2 d \mathbf{n}_{1,2}^0 (e^0 n^0) - 2 n^0 (e^0 d \mathbf{n}_{1,2}^0),$$

was unter Verwendung des Obigen übergeht in

$$d \mathbf{r}_{1,2}^0 = -2 \frac{d s_{1,2}}{\varrho_{1,2}} \{s_{1,2}^0 (e^0 n^0) - n^0 (e^0 s_{1,2}^0)\}.$$

Der Öffnungswinkel $d\Phi$ des Elementarkegels, den die benachbarten Reflexionsstrahlen bilden, berechnet sich nun auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} d \Omega \cdot \mathbf{r}^0 &= [d \mathbf{r}_1^0, d \mathbf{r}_2^0] \\ &= 4 \frac{d s_1 d s_2}{\varrho_1 \varrho_2} \{[s_1^0 s_2^0] (e^0 n^0)^2 - [s_1^0 n^0] (e^0 n^0) (e^0 s_2^0) \\ &\quad - [n^0 s_2^0] (e^0 s_1^0) (e^0 n^0)\}. \end{aligned}$$

Da aber für Hauptschnitte $s_1^0 \perp s_2^0$, so ist $[s_1^0 s_2^0] = n^0$, und es folgt mit $ds_1 ds_2 = do$ und $1/\varrho_1 \varrho_2 = K$

$$d \Omega \cdot \mathbf{r}^0 = 4 K do \{n^0 (e^0 n^0)^2 + [n^0 (e^0 n^0), -s_1^0 (e^0 s_2^0) + s_2^0 (e^0 s_1^0)]\}.$$

Hier kann man das Vektorprodukt in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} [n^0 (e^0 n^0), -[e^0 [s_1^0 s_2^0]]] &= [n^0 (e^0 n^0), -[e^0 n^0]] \\ &= -[n^0 [e^0 n^0]] (e^0 n^0) = -e^0 (e^0 n^0) + n^0 (e^0 n^0)^2. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, dann wird

$$\begin{aligned} d \Omega \cdot \mathbf{r}^0 &= 4 K do \{n^0 (e^0 n^0)^2 - e^0 (e^0 n^0) + n^0 (e^0 n^0)^2\} \\ &= -4 K do (e^0 n^0) \{e^0 - 2 n^0 (e^0 n^0)\} \\ &= -4 K do (e^0 n^0) \mathbf{r}^0. \end{aligned}$$

mit

$$\delta^{(x)} = \delta_p = k(\alpha_{pq} - \alpha) = p \cdot 2\pi; \quad \delta^{(y)} = \delta_q = k(\beta_{pq} - \beta) = q \cdot 2\pi. \quad (1, 19)$$

Es ist nun wieder über die nächste Umgebung des vom Hauptmaximum eingenommenen Winkelraumes zu integrieren, um alle Nebenmaxima zu erfassen.

Da das Element des Winkelraumes bekanntlich durch $d\alpha' d\beta' / \gamma'$ gegeben ist, entstehen aus (1, 18) zwei Integrale von der Form (1, 13a), so daß, da γ_{pq} wegen seiner geringen Veränderlichkeit vor das Integral gezogen werden kann, sich als Endformel ergibt:

$$I_{pq} = \frac{4\pi^2}{k^2 \gamma_{pq}} |A_{pq}^*|^2 \cdot MN = \frac{\lambda^2}{\gamma_{pq}} |A_{pq}^*|^2 \cdot MN. \quad (1, 20)$$

Auch diese allgemeine Formel gestattet es, unter Benutzung der Zwischenresultate (1, 9), (1, 10) und (1, 17) für eine beliebige, doppelt periodisch gewellte Oberfläche $z = f(x, y)$, die in beiden Achsenrichtungen die gleiche Furchenweite hat, die Gesamtintensität zu berechnen, die in das (pq) -te Maximum hineingeht.

§ 3. *Eindimensionaler Spezialfall.* Die beiden oben allgemein betrachteten Fälle sollen jetzt für die einfachsten periodischen Oberflächenformen durchgeführt werden, und zwar habe im eindimensionalen Falle die Oberflächengleichung die Gestalt

$$z = f(x) = \varepsilon \cdot \cos 2\pi x, \quad (1, 21)$$

wobei wieder alle Längen im Maßstab a (Gitterkonstante) gemessen sind.

Das p -te Maximum werde nun in der Richtung α_p, γ_p und an den Stellen x_p, z_p reflektiert. Zur Berechnung von x_p dient folgende Beziehung, die durch Division der ersten und dritten Komponentengleichung aus (1, 4) entsteht:

$$f'(x) = -\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}. \quad (1, 22)$$

Hieraus folgt für (1, 21) unter gleichzeitiger Verwendung der Fraunhoferschen Bedingung

$$\sin 2\pi x_p = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon(\gamma_p - \gamma)}. \quad (1, 23)$$

Offenbar haben nun auf unserer betrachteten Oberfläche die beiden Punkte

$$\begin{array}{c|c|c} P_0 & x_p & z_p \\ P_1 & \frac{1}{2} - x_p & -z_p \end{array}$$

die gleichen Normalenkomponenten, wobei $z_p = \varepsilon \cdot \cos 2\pi x_p$ ist.

Die beiden geometrisch-optischen Wegdifferenzen sind daher nach (1, 9) und (1, 12) $d^{(0)} = 0$ und $d^{(1)} = p\lambda (\frac{1}{2} - 2x_p) - (\gamma_p - \gamma) 2z_p$, während die Absolutbeträge der Amplituden für beide Punkte wegen gleicher Oberflächenkrümmung übereinstimmen.

Bei der Berechnung der Phasendifferenzen ist noch zu beachten, daß die von P_1 reflektierte Strahlengesamtheit in ihrer Eigenschaft als Zylinderwelle eine Brennpunktlinie zu passieren hat, wobei sie den Phasensprung $\pi/2$ erleidet. Man erhält somit für die Phasendifferenzen nach (1, 9) $\delta^{(0)} = 0$ und

$$\delta^{(1)} = k d^{(1)} = p\pi - 2k \{ (\gamma_p - \gamma) z_p + p\lambda x_p \} + \frac{\pi}{2}.$$

Also wird nach (1, 10)

$$A_p^* = \sqrt{i_p} \{ e^0 + e^{i\delta^{(1)}} \}$$

und

$$|A_p^*|^2 = i_p \{ 2 + 2 \cos \delta^{(1)} \} = 2 i_p \{ 1 + (-1)^p \sin \delta_p \} \quad (1, 24)$$

mit

$$\delta_p = 2k \{ (\gamma_p - \gamma) \varepsilon \cdot \cos 2\pi x_p + p\lambda \cdot x_p \}.$$

Danach ergibt sich mit (1, 8) und (1, 21) für die Gesamtintensität des in der Richtung $\alpha_p \gamma_p$ liegenden p -ten Maximums aus (1, 13):

$$I_p = \frac{1}{\gamma_p} (\gamma_p + 2\pi \varepsilon \cdot \sin 2\pi x_p \cdot \alpha_p)^2 \frac{1 + (-1)^p \sin \delta_p}{\pi k \varepsilon |(\gamma_p - \gamma) \cos 2\pi x_p|} \cdot N, \quad (1, 25)$$

wobei $\sin 2\pi x_p$ durch (1, 23) und δ_p durch (1, 24) gegeben sind.

§ 4. Zweidimensionaler Spezialfall. Im zweidimensionalen Falle habe die Oberfläche die einfache Gestalt

$$z = f(x, y) = \varepsilon (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y). \quad (1, 26)$$

Zur Berechnung der Koordinaten der Oberflächenpunkte, die in die Richtung des (pq) -ten Maximums reflektieren, kann man hier wie im eindimensionalen Falle aus (1, 4) die (1, 23) entsprechenden Beziehungen

$$\sin 2\pi x_{pq} = \frac{p\lambda}{2\pi \varepsilon (\gamma_{pq} - \gamma)}; \quad \sin 2\pi y_{pq} = \frac{q\lambda}{2\pi \varepsilon (\gamma_{pq} - \gamma)} \quad (1, 27)$$

herleiten.

Man erkennt außerdem sofort, daß die Punkte

P_0	x_{pq}	y_{pq}	z_{pq}
P_1	x_{pq}	$\frac{1}{2} - y_{pq}$	z_{pq}^*
P_2	$\frac{1}{2} - x_{pq}$	y_{pq}	$-z_{pq}^*$
P_3	$\frac{1}{2} - x_{pq}$	$\frac{1}{2} - y_{pq}$	$-z_{pq}$

die gleichen Komponenten des Normalenvektors $\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^0$:

$$n_x = -2\pi \varepsilon \cdot \sin 2\pi x_{pq}; \quad n_y = -2\pi \varepsilon \cdot \sin 2\pi y_{pq}; \quad n_z = -1$$

haben, wobei

$$z_{pq} = \varepsilon (\cos 2\pi x_{pq} + \cos 2\pi y_{pq}) \quad \text{und} \quad z_{pq}^* = \varepsilon (\cos 2\pi x_{pq} - \cos 2\pi y_{pq}).$$

Die entsprechenden geometrisch-optischen Wegdifferenzen sind also nach der ergänzten Beziehung (1,9) $d^{(0)} = 0$ und

$$\begin{aligned} d^{(1)} &= p\lambda \left(\frac{1}{2} - 2x_{pq}\right) + (\gamma_{pq} - \gamma) (z_{pq}^* - z_{pq}), \\ d^{(2)} &= q\lambda \left(\frac{1}{2} - 2y_{pq}\right) - (\gamma_{pq} - \gamma) (z_{pq}^* + z_{pq}), \\ d^{(3)} &= p\lambda \left(\frac{1}{2} - 2x_{pq}\right) + q\lambda \left(\frac{1}{2} - 2y_{pq}\right) - 2(\gamma_{pq} - \gamma) z_{pq}. \end{aligned}$$

Es besteht somit gleichzeitig die Beziehung $d^{(3)} = d^{(1)} + d^{(2)}$. Man muß jetzt noch berücksichtigen, daß die von P_1 und P_2 reflektierten Strahlen- gesamtheiten eine, die von P_3 kommende aber zwei Brennpunkten zu passieren haben, und erhält schließlich für die Phasendifferenzen neben $\delta^{(0)} = 0$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= p\pi - 2k \{(\gamma_{pq} - \gamma) \varepsilon \cdot \cos 2\pi x_{pq} + p\lambda x_{pq}\} + \frac{\pi}{2}, \\ \delta^{(2)} &= q\pi - 2k \{(\gamma_{pq} - \gamma) \varepsilon \cdot \cos 2\pi y_{pq} + q\lambda y_{pq}\} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und wiederum $\delta^{(3)} = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$, da auch der Phasensprung π für P_3 gleich der Summe der Phasensprünge für P_1 und P_2 ist.

Weil andererseits die Amplituden wieder für alle Punkte die gleichen sind, erhalten wir bei der Summation nach (1, 10)

$$\begin{aligned} A_{pq}^* &= \sqrt{i_{pq}} \sum_0^3 e^{i\delta^{(u)}} = \sqrt{i_{pq}} \{e^0 + e^{i\delta^{(1)}} + e^{i\delta^{(2)}} + e^{i(\delta^{(1)} + \delta^{(2)})}\} \\ &= \sqrt{i_{pq}} (1 + e^{i\delta^{(1)}}) (1 + e^{i\delta^{(2)}}) \end{aligned}$$

und somit

$$|A_{pq}^*|^2 = 4i_{pq} [1 + (-1)^p \sin \delta_{pq}^{(1)}] [1 + (-1)^q \sin \delta_{pq}^{(2)}] \quad (1, 28)$$

mit

$$\delta_{pq}^{(1)} = 2k \{(\gamma_{pq} - \gamma) \varepsilon \cdot \cos 2\pi x_{pq} + p\lambda x_{pq}\} \quad (1, 29)$$

und

$$\delta_{pq}^{(2)} = 2k \{(\gamma_{pq} - \gamma) \varepsilon \cdot \cos 2\pi y_{pq} + q\lambda y_{pq}\}.$$

Unter Verwendung von (1, 28) und (1,17) mit (1, 26) ergibt sich schließlich aus (1, 20) für die Gesamtintensität, die in das (pq) -te Maximum hineingeht:

$$\begin{aligned} I_{pq} &= \frac{1}{\gamma_{pq}} (\gamma_{pq} + 2\pi \varepsilon \cdot \sin 2\pi x_{pq} \cdot \alpha_{pq} + 2\pi \varepsilon \cdot \sin 2\pi y_{pq} \cdot \beta_{pq})^2 \\ &\quad \frac{[1 + (-1)^p \sin \delta_{pq}^{(1)}] [1 + (-1)^q \sin \delta_{pq}^{(2)}]}{\pi^2 k^2 \varepsilon^2 (\gamma_{pq} - \gamma)^2 |\cos 2\pi x_{pq} \cos 2\pi y_{pq}|} \cdot MN, \quad (1, 30) \end{aligned}$$

wo $\sin 2\pi x_{pq}$ bzw. $\sin 2\pi y_{pq}$ durch (1, 27) und $\delta_{pq}^{(1)}$ bzw. $\delta_{pq}^{(2)}$ durch (1, 29) gegeben sind.

II. Wellentheoretische Methode.

§ 5. *Eindimensionaler Fall.* Um die beiden oben betrachteten Fälle, die Reflexion an einer ein- bzw. zweidimensional periodisch gefurchten Oberfläche wellentheoretisch zu behandeln, knüpft man am besten an Rayleighs diesbezügliche Untersuchungen an¹⁾. Zwar hat Rayleigh nur den Fall der eindimensional sinusförmig gefurchten Oberfläche (Strichgitter), und auch diesen nur für senkrechten Einfall allgemein behandelt, doch kann man sein Verfahren ohne große Schwierigkeiten auch auf beliebigen Einfall, sowie auf entsprechend einfache zweidimensionale Fälle anwenden. Außerdem läßt sich durch einen Kunstgriff seine Methode noch derart verbessern, daß bei den zu betrachtenden Näherungen die vernachlässigten Restglieder wesentlich kleiner ausfallen.

Bei der eindimensional gefurchten Oberfläche kann man sich wiederum mit einer Reduktion auf die x - z -Ebene begnügen, wenn die Furchen selbst der y -Achse parallel sind.

Modifikation der Rayleighschen Ableitung. Man betrachtet mit Rayleigh die vollkommen reflektierende Oberfläche

$$z = \varepsilon \cdot \cos 2\pi x, \quad (2, 1)$$

wobei die Wellenlänge a der Furchung als Maßstabeinheit genommen sei, und eine aus beliebiger Richtung (α, γ) einfallende Welle

$$u_e = e^{ik(\alpha x + \gamma z)}. \quad (2, 2)$$

Dabei wird also die Amplitude $A_e = 1$ gesetzt und vom Zeitfaktor abgesehen.

Für die Reflexionswelle macht nun Rayleigh den Ansatz

$$u_r = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{ik(\alpha_n x + \gamma_n z)}, \quad (2, 3)$$

wo die α_n für beliebige n aus den Fraunhoferschen Bedingungen $\alpha_n - \alpha = n\lambda$ zu entnehmen sind, während man die γ_n durch $\gamma_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2}$ definiert.

Es ergibt sich somit für den Gesamtvorgang

$$u = u_e + u_r. \quad (2, 4)$$

Wegen vollkommener Reflexion ist jetzt auf der Oberfläche (2, 1) die Randbedingung

$$u = u_e + u_r = 0$$

¹⁾ The Theory of Sound, 2nd Ed., 1926, Vol. II, § 272a, S. 89; Proc. Roy. Soc. London (A) 79, 399, 1907; Scientific Papers 5, 388, 1912.

zu erfüllen. Während nun Rayleigh vor Erfüllung dieser Randbedingung (2, 4) mit $\exp. -ik(\alpha x + \gamma z)$ multipliziert, wählen wir als Faktor $\exp. -ik(\alpha x + \gamma_p z)$, wo γ_p einer der nach den Fraunhoferschen Bedingungen zulässigen γ_n -Werte ist.

Die Randbedingung liefert dann mit der Abkürzung $2\pi x = x^*$ und wegen $\alpha_n - \alpha = n\lambda$:

$$0 = e^{ik(\gamma - \gamma_p)\varepsilon \cdot \cos x^*} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{ik(\gamma_n - \gamma_p)\varepsilon \cdot \cos x^* + inx^*} = F(x^*). \quad (2, 5)$$

Man denkt sich nunmehr $F(x^*) = 0$ in eine Fourierreihe $\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_\tau e^{i\tau x^*} = 0$ entwickelt und erhält dann nach Integration von $F(x^*) \cdot \exp -ipx^*$ über dx^* von 0 bis 2π den Koeffizienten $C_p = 0$, für den sich, wenn man A_p aus der Summe herausnimmt, in Besselschen Funktionen ergibt:

$$0 = (-i)^p J_p[k\varepsilon(\gamma_p - \gamma)] + A_p + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{+\infty} A_n i^{n-p} J_{n-p}[k\varepsilon(\gamma_n - \gamma_p)]. \quad (2, 6)$$

Bei Rayleigh entsteht dagegen nach seinem oben angegebenen Vorgehen

$$0 = (-i)^p J_p(2k\varepsilon\gamma) + A_p J_0[k\varepsilon(\gamma + \gamma_p)] + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{+\infty} A_n i^{n-p} J_{n-p}[k\varepsilon(\gamma + \gamma_n)]. \quad (2, 7)$$

Das in (2, 6) erzielte Resultat ist nun in zwei Punkten diesem Rayleighschen Ausdruck überlegen, und zwar vor allem, weil das Glied mit A_p keinen Faktor enthält, was eine bequeme und sogleich anzugebende Reihenentwicklung gestattet, und zweitens, weil für $(-\gamma_p) < \gamma$ die entsprechenden Argumente der Besselschen Funktionen in (2, 6) kleiner sind als in (2, 7), wodurch bei Näherungen kleinere Restglieder erzielt werden.

Näherungen im eindimensionalen Falle. Mit der Abkürzung

$$k\varepsilon(\gamma_r - \gamma) = s_r \quad (2, 8)$$

erhalten wir nunmehr durch Iteration aus (2, 6)

$$A_p = -(-i)^p \left\{ J_p(s_p) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{+\infty} J_n(s_n) J_{n-p}(s_n - s_p) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{+\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq p}}^{+\infty} J_m(s_m) J_{m-n}(s_m - s_n) J_{n-p}(s_n - s_p) - \dots \right\}; \quad (2, 9)$$

d. h. einen Ausdruck von der Form

$$A_p = -(-i)^p \{J_p(s_p) + S_1 + S_2 + \dots\},$$

in dem das erste Glied

$$A_p = -(-i)^p J_p(s_p) \quad (2, 10)$$

als nullte Näherung bezeichnet werden kann und S_1, S_2, \dots die sich bei weiteren Näherungen ergebenden Zusatzglieder darstellen.

Setzen wir nun

$$s_{p\pm 1} - s_p = k \varepsilon (\gamma_{p\pm 1} - \gamma_p) = \pm \Delta$$

oder

$$\Delta \sim \frac{1}{2} k \varepsilon (\gamma_{p+1} - \gamma_{p-1}), \quad (2, 11)$$

dann wird offenbar

$$\begin{aligned} S_1 &= -J_{p+1}(s_p + \Delta) J_1(\Delta) - J_{p-1}(s_p - \Delta) J_{-1}(-\Delta) + \dots \\ &= -J_1(\Delta) [J_{p+1}(s_p + \Delta) + J_{p-1}(s_p - \Delta)] + \dots \end{aligned} \quad (2, 12)$$

Um über die Größe von Δ Näheres aussagen zu können, wollen wir p groß annehmen und $\gamma_{p+1} - \gamma_{p-1} = 2 \Delta \gamma_p$ setzen; da

$$\gamma_p = [1 - (\alpha + p \lambda)^2]^{1/2} \quad \text{und somit} \quad \frac{d\gamma_p}{dp} \sim \Delta \gamma_p = -\frac{\alpha_p}{\gamma_p} \cdot \lambda$$

ist, erhält man näherungsweise:

$$\Delta \sim -2\pi \varepsilon \frac{\alpha_p}{\gamma_p}. \quad (2, 13)$$

Fordern wir jetzt, daß $|\Delta| \ll 1$ sei, dann ist diese Bedingung bestimmt erfüllt, wenn

$$\varepsilon < \frac{1}{2\pi} \quad \text{und} \quad \alpha_p \ll 1. \quad (2, 14)$$

Wir wollen nunmehr diese beiden Voraussetzungen machen und brauchen dann in (2, 12) nur solche Glieder zu berücksichtigen, die in Δ linear sind, d. h. es genügen die niedergeschriebenen. Es wird demnach

$$S_1 = -\frac{\Delta}{2} [J_{p+1}(s_p) + J_{p-1}(s_p)] = -\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{2p}{s_p} J_p(s_p)$$

und wir erhalten für die erste Näherung

$$A_p = -(-i)^p J_p(s_p) \left\{ 1 - \frac{p}{s_p} \cdot \Delta \right\}; \quad \frac{p}{s_p} \cdot \Delta \ll 1. \quad (2, 15)$$

Nachweis der Konvergenz. Die obigen Näherungen wurden unter der Voraussetzung erhalten, daß die sich für A_p in (2, 9) ergebende unendliche Reihe sehr schnell konvergiert. Diese Konvergenz soll jetzt dadurch nachgewiesen werden, daß wir das rasche Verschwinden der in den einzelnen Gliedern auftretenden Besselschen Funktionen für große Nummern zeigen.

Für große ν hat man aber

$$\gamma_\nu = [1 - (\alpha + \nu\lambda)^2]^{1/2} \rightarrow i\nu\lambda$$

und somit

$$s_\nu \rightarrow ik\varepsilon\nu\lambda = i \cdot 2\pi\varepsilon\nu.$$

Wir haben nun schon in (2, 14) vorausgesetzt, daß $\varepsilon < \frac{1}{2\pi}$, woraus folgt, daß für große Nummern immer $\nu > |s_\nu|$. In diesem Falle können wir aber die von Debye angegebene Näherungsformel für Besselsche Funktionen¹⁾ verwenden, nach der

$$J_\nu(s_\nu) \rightarrow \frac{1}{\pi} e^{-s_\nu(\tau \cdot \text{Coj } \tau - \text{Sin } \tau)} \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{s_\nu}{2} \text{Sin } \tau\right)^{1/2}},$$

wobei

$$\text{Coj } \tau = \frac{\nu}{s_\nu} \quad \text{und daher} \quad \text{Sin } \tau \sim \frac{\nu}{s_\nu}; \quad e^{-\tau} \sim \frac{s_\nu}{2\nu},$$

so daß

$$\begin{aligned} J_\nu(s_\nu) &\rightarrow \frac{e^{-s_\nu\left(\tau \cdot \frac{\nu}{s_\nu} - \frac{\nu}{s_\nu}\right)}}{\left(\pi \cdot \frac{s_\nu}{2} \cdot \frac{\nu}{s_\nu}\right)^{1/2}} \\ &\rightarrow \left(\frac{s_\nu}{2\nu}\right)^\nu e^\nu \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)^{1/2}} = \frac{(i \cdot \pi \varepsilon \cdot e)^\nu}{\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2, 16)$$

Die Besselfunktion J_ν verschwindet also für große ν sehr rasch, wenn $\varepsilon < 1/2\pi$, da dann ja erst recht $\varepsilon < 1/e\pi$ ist. Damit ist aber gezeigt, daß unter dieser Voraussetzung die Reihe (2, 9) gut konvergiert, so daß die obigen Näherungen durchaus zulässig sind.

§ 6. Zweidimensionaler Fall. Ableitung der allgemeinen Formel. Im zweidimensionalen Falle betrachten wir die entsprechend einfache, doppelt periodisch gefurchte Oberfläche

$$z = \varepsilon (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y) \quad (2, 17)$$

und die in beliebiger Richtung einfallende ebene Welle (Richtungskosinus α , β , γ)

$$u_e = e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Für die reflektierte Welle haben wir dann den analogen Ansatz

$$u_r = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{mn} e^{ik(\alpha_{mn} x + \beta_{mn} y + \gamma_{mn} z)},$$

¹⁾ Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1909. S. 103.

wobei die Richtungskosinus der Intensitätsmaxima bestimmt sind durch die Fraunhoferschen Bedingungen

$$\alpha_{mn} - \alpha = m\lambda; \quad \beta_{mn} - \beta = n\lambda; \quad \alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2 + \gamma_{mn}^2 = 1.$$

Für den Gesamtvorgang ist zu setzen:

$$u = u_e + u_r,$$

und wenn man hier mit $\exp - ik(\alpha x + \beta y + \gamma_{qp} z)$ multipliziert und der Kürze halber

$$2\pi x = x^*; \quad 2\pi y = y^*$$

setzt, folgt unter Verwendung der Fraunhoferschen Bedingungen aus der Randbedingung $u = u_e + u_r = 0$ nach (2, 17) für Oberflächenpunkte

$$O = e^{ik(\gamma - \gamma_{pq})\varepsilon(\cos x^* + \cos y^*)} + \sum_{-\infty}^{+\infty} m \sum_{-\infty}^{+\infty} n A_{mn} e^{ik(\gamma_{mn} - \gamma_{pq})\varepsilon(\cos x^* + \cos y^*) + i(m x^* + n y^*)} = F(x^*, y^*).$$

Entwickeln wir nun wieder $F(x^*, y^*)$ in eine (hier doppelte) Fourierreihe, dann sind deren sämtliche Koeffizienten C_{pq} gleich Null zu setzen, weil die ganze Reihe identisch verschwindet. Wir multiplizieren dabei mit $\exp. -(ipx^* + iqy^*)$ und integrieren hinsichtlich x^* und y^* von 0 bis 2π . Setzt man noch abkürzend

$$s_{\mu\nu} = k\varepsilon(\gamma_{\mu\nu} - \gamma), \quad (2, 18)$$

so ergibt sich unter Einführung der Besselfunktionen, wenn aus der Doppelsumme noch das Glied für $m = p$ und $n = q$ herausgenommen wird:

$$O = (-i)^{p+q} J_p(s_{pq}) J_q(s_{pq}) + A_{pq} + \sum_{\substack{m \neq p \\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{n \neq q \\ -\infty}}^{+\infty} A_{mn} i^{(m+n)-(p+q)} J_{m-p}(s_{mn} - s_{pq}) J_{n-q}(s_{mn} - s_{pq}). \quad (2, 19)$$

Näherungen im zweidimensionalen Falle. Aus (2, 19) folgt durch Iteration

$$A_{pq} = -(-i)^{p+q} \left\{ J_p(s_{pq}) J_q(s_{pq}) - \sum_{\substack{m \neq p \\ -\infty}}^{+\infty} \sum_{\substack{n \neq q \\ -\infty}}^{+\infty} J_m(s_{mn}) J_n(s_{mn}) J_{m-p}(s_{mn} - s_{pq}) J_{n-q}(s_{mn} - s_{pq}) + \dots \right\}, \quad (2, 20)$$

wo wie früher das erste Glied

$$A_{pq} = -(-i)^{p+q} J_p(s_{pq}) J_q(s_{pq}) \quad (2, 21)$$

als nullte Näherung bezeichnet werden kann.

Setzen wir nun

$$\text{und} \quad s_{p\pm 1, q} - s_{pq} = \pm \Delta_1; \quad s_{p, q\pm 1} - s_{pq} = \pm \Delta_2 \quad (2, 22)$$

$$\Delta_1 \sim \frac{1}{2} k \varepsilon (\gamma_{p+1, q} - \gamma_{p-1, q}); \quad \Delta_2 \sim \frac{1}{2} k \varepsilon (\gamma_{p, q+1} - \gamma_{p, q-1}), \quad (2, 23)$$

dann erhalten wir für das bei der nullten Näherung vernachlässigte Restglied

$$S_1 = -J_{p+1}(s_{pq} + \Delta_1) J_q(s_{pq} + \Delta_1) J_1(\Delta_1) J_0(\Delta_1) - \dots \\ - J_p(s_{pq} - \Delta_2) J_{q-1}(s_{pq} - \Delta_2) J_0(-\Delta_2) J_1(-\Delta_2) - \dots$$

Berücksichtigt man jetzt, der im eindimensionalen Falle durchgeführten Abschätzung zufolge, nur die in Δ_1 und Δ_2 linearen Glieder, d. h. macht man die Voraussetzungen

$$\varepsilon < \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha_{pq} \ll 1, \quad \beta_{pq} \ll 1, \quad (2, 24)$$

so ergibt sich schließlich mit dem überall gleichen Argument s_{pq}

$$S_1 = -\frac{\Delta_1}{2} (J_{p+1} J_q + J_{p-1} J_q) - \frac{\Delta_2}{2} (J_p J_{q+1} - J_p J_{q-1}) \\ = -\frac{\Delta_1}{2} \frac{2p}{s_{pq}} J_p J_q - \frac{\Delta_2}{2} \frac{2q}{s_{pq}} J_p J_q,$$

und es folgt für die erste Näherung

$$A_{pq} = -(-i)^{p+q} J_p(s_{pq}) J_q(s_{pq}) \left\{ 1 - \frac{p}{s_{pq}} \cdot \Delta_1 - \frac{q}{s_{pq}} \cdot \Delta_2 \right\}; \quad (2, 25) \\ \left. \begin{array}{l} \frac{p}{s_{pq}} \cdot \Delta_1 \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{q}{s_{pq}} \cdot \Delta_2 \ll 1. \end{array} \right\}$$

Berechnung der Intensitäten. Um nun die Gesamtenergie, die in ein Maximum hineingeht, zu erhalten, hat man die obigen Intensitäten A_p^2 bzw. A_{pq}^2 mit dem Querschnitt des betreffenden Reflexionsstrahls zu multiplizieren. Dieser Querschnitt ist aber für ein Gitter von der Breite Na bzw. MNa^2 gleich $Na\gamma_p$ bzw. $MNa^2\gamma_{pq}$. Es wird also wegen $a = 1$

$$I_p = |A_p|^2 \gamma_p \cdot N \quad \text{bzw.} \quad I_{pq} = |A_{pq}|^2 \gamma_{pq} \cdot MN.$$

Bei Einsetzung der ersten Näherungen für die Amplituden und Fortlassen der Glieder in Δ^2 bzw. Δ_1^2 und Δ_2^2 ergibt sich schließlich mit (2, 15) und (2, 25)

$$I_p = \gamma_p \left(1 - 2 \frac{p}{s_p} \Delta \right) J_p^2(s_p) \cdot N \quad (2, 26)$$

und

$$I_{pq} = \gamma_{pq} \left(1 - 2 \frac{p}{s_{pq}} \Delta_1 - 2 \frac{q}{s_{pq}} \Delta_2 \right) J_p^2(s_{pq}) J_q^2(s_{pq}) \cdot MN. \quad (2, 27)$$

III. Vergleich beider Methoden.

Beim Vergleich beider Methoden ist zu beachten, daß die wellentheoretische Methode von Kapitel II nur durchführbar ist für sinusförmig gewellte Oberflächen. Für andere Oberflächenformen würde sie unübersehbar

kompliziert werden. Daneben müssen wir uns, um die Näherungsbetrachtungen von Kapitel II benutzen zu können, beschränken auf den Fall

$$\varepsilon < \frac{1}{2\pi} \quad \text{und} \quad \alpha_p \ll 1 \quad (\text{A})$$

bzw. zweidimensional

$$\alpha_{pq} \ll 1, \quad \beta_{pq} \ll 1$$

vgl. (2, 14) und (2, 24).

Andererseits ist nach der geometrisch-optischen Methode von Kapitel I die Lage der zu dem einzelnen Maximum gehörigen Reflexionspunkte nach (1, 23) durch $\sin 2\pi x_p = p/s_p$ bzw. nach (1, 27) durch $\sin 2\pi x_{pq} = p/s_{pq}$ und $\sin 2\pi y_{pq} = q/s_{pq}$ gegeben. Diese Methode liefert daher nur Maxima, sofern

$$s_p > p \quad (\text{B})$$

bzw. zweidimensional

$$s_{pq} > p \quad \text{und} \quad s_{pq} > q.$$

Da aber s_p und s_{pq} den Betrag $2k\varepsilon$ nicht überschreiten können, so gibt es geometrisch-optisch nur endlich viele Maxima. Selbstverständlich kann man eine Übereinstimmung der beiden Methoden nur erwarten, solange man hinreichend weit von dieser Grenze entfernt ist.

Wegen des Auftretens der Besselschen Funktionen in dem Ausdruck für die Intensitäten nach Kapitel II ist es außerdem zweckmäßig, die Fälle „großes Argument“ ($s_{p,pq} \gg 1$) und „mittleres Argument“ ($s_{p,pq} > 1$) zu trennen.

§ 7. *Große Argumente.* a) *Eindimensionaler Fall.* *Allgemeiner Vergleich.* Da in dem Ausdruck (2, 26) für I_p die Besselfunktion $J_p(s_p)$ vorkommt, müssen wir für diese Näherungswerte suchen. Nun kann man aber nach Debye für den Fall, daß $s_p \gg 1$ und $s_p > p$ ist, für Besselfunktionen folgende Näherung setzen¹⁾:

$$J_p(s_p) = \frac{\cos \left\{ s_p (\sin \tau - \tau \cdot \cos \tau) - \frac{\pi}{4} \right\}}{\left(\frac{\pi}{2} s_p \sin \tau \right)^{1/2}}; \quad \cos \tau = \frac{p}{s_p}, \quad (3, 1)$$

wobei man von der allgemeinen Debyeschen Reihenentwicklung nur das erste Glied berücksichtigt.

Für die Intensität folgt hieraus und aus (2, 26) nach leichter Umrechnung

$$I_p = \gamma_p \left(1 - 2 \frac{p}{s_p} \Delta \right) \frac{1 + \sin \left\{ 2 s_p \left(\sin \tau - \tau \cdot \frac{p}{s_p} \right) \right\}}{\pi s_p \sin \tau} \cdot M N. \quad (3, 3)$$

¹⁾ Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1909. S. 102.

In diesen Ausdruck kann man aber leicht auch den in (1, 25) erhaltenen geometrisch-optischen überführen, wenn man dort die in Kapitel II benutzten Abkürzungen einführt.

Setzt man zunächst, wie in § 5, $k\varepsilon(\gamma_p - \gamma) = s_p$, dann wird aus (1, 25) unter gleichzeitiger leichter Umformung des Faktors

$$I_p = \gamma_p \left(1 + 2\pi\varepsilon \cdot \sin 2\pi x_p \frac{\alpha_p}{\gamma_p} \right)^2 \frac{1 + (-1)^p \sin \left\{ 2s_p \left[\cos 2\pi x_p + \frac{p}{s_p} 2\pi x_p \right] \right\}}{\pi s_p \cos 2\pi x_p} \cdot N. \quad (3, 4)$$

Mit der Abkürzung $2\pi x_p = x_p^*$, mit der in (2, 13) erhaltenen Abschätzung $\Delta \sim -2\pi\varepsilon \frac{\alpha_p}{\gamma_p}$, bei Vernachlässigung des in Δ quadratischen Gliedes und wegen $\cos \tau = \sin x_p^* = \frac{p}{s_p}$, d. h. also auch $\sin \tau = \cos x_p^*$ und $\tau = \frac{\pi}{2} - x_p^*$, geht (3, 4) in (3, 3) über.

Die Übereinstimmung der von beiden Methoden gelieferten Ergebnisse ist also innerhalb der hier gewählten Näherungen vollständig.

Grenze der wellentheoretischen Intensitäten. Da man geometrisch-optisch keine reellen Intensitätsmaxima mehr erhält, wenn $p > s_p$ wird, liegt die Frage nahe, wie sich in diesem Falle die Ergebnisse der wellentheoretischen Methode verhalten.

Ist nun $p > s_p$, dann kann man für $J_p(s_p)$ die in der Konvergenzbetrachtung von § 2 verwendete Debyesche Näherung (2, 16) setzen.

Wenn daher

$$p > \frac{e}{2} s_p \quad (3, 5)$$

ist, wird $J_p(s_p)$ sehr rasch verschwinden, zumal für diesen Grenzfall außerdem nur große p in Frage kommen. Diese Grenze für die wellentheoretischen Intensitätsmaxima ist demnach nahezu die gleiche wie bei der geometrisch-optischen Betrachtungsweise, doch gehen die wellentheoretischen Werte noch etwas über die geometrisch-optische Grenze $p = s_p$ hinaus.

Zahlenbeispiel. Es soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, wie sich die Ergebnisse beider Methoden zahlenmäßig zueinander verhalten. Wir betrachten dabei die Oberfläche

$$z = 0,15 \cdot \cos 2\pi x$$

und eine senkrecht einfallende ebene Welle von der Wellenlänge $\lambda = 0,10$. In diesem Falle erhält man für die Intensitätsmaxima (abgesehen vom Faktor N):

p	s_p	Intensitäten	
		geometrisch-optische	wellentheoretische
0	18,85	0,0169	0,0167
1	18,80	0,0171	0,0175
2	18,66	0,0134	0,0140
3	18,42	0,0248	0,0252
4	18,07	0,0075	0,0072
5	17,59	0,0414	0,0404
6	16,96	0,00005	0,00008
7	16,15	0,0489	0,0453
8	15,08	0,0436	0,0380
9	13,53	0,0039	0,0025
10	9,42	—	

Hierbei ist noch zu beachten, daß beide Methoden beim Fortschreiten gegen die Grenze der Maxima ungenauer werden.

b) *Zweidimensionaler Fall.* Setzen wir im zweidimensionalen Fall, wie oben erwähnt, voraus, daß $s_{pq} \gg 1$ und $s_{pq} > p$ bzw. $s_{pq} > q$, dann ist die analoge Übereinstimmung der Intensitätswerte beider Methoden für ihre Hauptbestandteile, d. h. für das Produkt $J_p^2(s_{pq}) J_q^2(s_{pq})$ und dem entsprechenden Teil des geometrisch-optischen Ausdrucks, ohne weiteres ersichtlich, da es sich hierbei lediglich um das Produkt zweier Ausdrücke handelt, für die wir einzeln im eindimensionalen Falle die Identität bereits nachgewiesen haben.

Aber auch die beiden Faktoren lassen sich ähnlich wie im eindimensionalen Falle ineinander überführen. So wird aus dem in (1, 30) auftretenden Faktor, wenn wir darin die Abkürzungen $2\pi x_{pq} = x_{pq}^*$ und $2\pi y_{pq} = y_{pq}^*$ einführen und außerdem von den Abschätzungen

$$\Delta_1 \sim -2\pi \varepsilon \frac{\alpha_{pq}}{\gamma_{pq}} \quad \text{und} \quad \Delta_2 \sim -2\pi \varepsilon \frac{\beta_{pq}}{\gamma_{pq}}$$

Gebrauch machen:

$$\gamma_{pq} (1 - \sin x_{pq}^* \Delta_1 - \sin y_{pq}^* \Delta_2)^2. \quad (3, 6)$$

Benutzen wir jetzt noch die Beziehungen

$$\sin x_{pq}^* = \frac{p}{s_{pq}} \quad \text{und} \quad \sin y_{pq}^* = \frac{q}{s_{pq}},$$

dann geht (3, 6) bei Vernachlässigung der Glieder in $\Delta_{1,2}^2$ vollkommen in den wellentheoretischen Faktor von (2, 27) über.

Damit ist gezeigt, daß auch im zweidimensionalen Falle die Übereinstimmung der beiden Methoden innerhalb der gewählten Näherungen eine vollkommene ist.

§ 8. *Mittlere Argumente.* a) *Eindimensionaler Fall. Grenze der Übereinstimmung.* Wir haben soeben gefunden, daß die beiden Methoden vollkommen übereinstimmen, wenn man für den Näherungswert von $J_p(s_p)$ in der von Debye angegebenen Reihe nur das erste Glied berücksichtigt. Ist nun s_p nicht sehr groß, sondern nur groß gegen 1 (praktisch etwa zwischen 5 und 10), so müßte man noch das nächste Reihenglied berücksichtigen, womit natürlich die Übereinstimmung mit dem geometrisch-optischen Resultat aufhört. Es interessiert daher die Frage, wie weit man mit s_p heruntergehen kann, ohne höhere Näherungen für $J_p(s_p)$ zu benötigen, und wie weit in diesem Fall die gute Übereinstimmung geht.

Wie bereits in § 7 erwähnt, ist nach Debye

$$J_p(s_p) = R_1 + R_2 + \dots$$

mit

$$R_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{s_p}{2} \sin \tau\right)^{1/2}} \cos \left\{ s_p (\sin \tau - \tau \cdot \cos \tau) - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (3,7)$$

und

$$R_2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24} \operatorname{ctg}^2 \tau \right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{s_p}{2} \sin \tau\right)^{3/2}} \cos \left\{ s_p (\sin \tau - \tau \cdot \cos \tau) - \frac{3\pi}{4} \right\},$$

wobei $\cos \tau = p/s_p$ ist. Setzen wir hierin

$$\left\{ s_p (\sin \tau - \tau \cdot \cos \tau) - \frac{\pi}{4} \right\} = \vartheta \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24} \operatorname{ctg}^2 \tau \right) = C, \quad (3,8)$$

dann wird wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ aus (3,7):

$$R_1 = \frac{\cos \vartheta}{\left(\pi \frac{s_p}{2} \sin \tau \right)^{1/2}}; \quad R_2 = \frac{\frac{\pi}{2} C \sin \vartheta}{\left(\pi \frac{s_p}{2} \sin \tau \right)^{3/2}}$$

und wir erhalten schließlich in zweiter Näherung

$$J_p(s_p) = \frac{\cos \vartheta + \frac{C}{s_p \sin \tau} \sin \vartheta}{\left(\pi \frac{s_p}{2} \sin \tau \right)^{1/2}}. \quad (3,9)$$

Sieht man jetzt von den Fällen ab, in denen $\cos \vartheta = 0$, also in erster Näherung auch $J_p(s_p) \sim 0$ ist, dann wird man den von dem zweiten Reihenglied stammenden Teil des Zählers vernachlässigen können, wenn

$$s_p \gg \frac{C}{\sin \tau}. \quad (3, 10)$$

Nehmen wir etwa an, daß

$$p \leq \frac{s_p}{2}, \quad (3, 11)$$

d. h. $\cos \tau = p/s_p \leq \frac{1}{2}$, dann wird nach (3, 8) $C \leq 0,20$. Es muß also nach (3, 10) sein

$$s_p \gg 0,23. \quad (3, 12)$$

Daraus folgt, daß sich für Werte von s_p , die der Bedingung (3, 12) genügen, für alle Maximanummern unter $s_p/2$ gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen beider Methoden zeigen wird.

Zahlenbeispiele. Um die obigen Folgerungen an Beispielen überblicken zu können, seien jetzt für senkrechten Einfall zwei praktische Fälle betrachtet.

Es sei zuerst

$$\lambda = 0,20 \quad \text{und} \quad \varepsilon = 0,10,$$

woraus sich für die Intensitäten (abgesehen von dem Faktor N) ergibt:

p	s_p	Intensitäten	
		geometrisch-optische	wellentheoretische
0	6,28	0,051	0,048
1	6,22	0,050	0,052
2	6,02	0,071	0,067
3	5,65	0,053	0,058
4	5,03	0,307	0,277
5	3,14	—	

Setzen wir dagegen

$$\lambda = 0,20 \quad \text{und} \quad \varepsilon = 0,05,$$

so erhalten wir

p	s_p	Intensitäten	
		geometrisch-optische	wellentheoretische
0	3,14	0,101	0,092
1	3,11	0,080	0,088
2	3,01	0,282	0,257
3	2,83	—	

Da man aber in diesen beiden Fällen $s_p \gg 0,23$ ansehen kann, müßte sich nach dem oben Gesagten bis zur Grenze $p \sim s_p/2$ eine gute Übereinstimmung zeigen, wie sie ja auch aus den Zahlenwerten ersichtlich ist.

b) *Zweidimensionaler Fall.* Im zweidimensionalen Fall kann sich selbstverständlich nichts anderes ergeben, da es sich hierbei nur um das Produkt zweier soeben betrachteter Besselfunktionen handelt. Es folgt daher, daß bei den Voraussetzungen

$$p \leq \frac{s_{pq}}{2} \quad \text{und} \quad q \leq \frac{s_{pq}}{2}$$

s_{pq} die Bedingung

$$s_{pq} \gg 0,23$$

erfüllen muß, wenn das erste Glied der Debyeschen Reihenentwicklung der Besselfunktionen ausschlaggebend und eine gute Übereinstimmung mit dem geometrisch-optischen Resultat erzielt werden soll.

Allgemein kann man also für mittlere Argumente sagen, daß auch hier die Übereinstimmung der Ergebnisse beider Methoden eine gute ist, solange die angegebenen Bedingungen eingehalten werden.

Ich möchte es nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. W. Lenz, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung ich die vorliegende Arbeit anfertigte, für die Unterstützung, die er mir bei der Ausführung der Arbeit zuteil werden ließ, meinen besten Dank auszusprechen.

Die Eigenschaften reeller Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung.

III. Die spezifischen Wärmen c_v bzw. c_p und die Spannungs- bzw. Ausdehnungskoeffizienten β bzw. α des Heliums.

Von Witold Jacyna (Jacyno) in Leningrad.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Oktober 1934.)

Es werden, nachdem die Anwendbarkeit der vereinfachten Zustandsgleichung

$$vp = R\psi - ap \{10\psi_0 - t(1 - 11e^\eta)\},$$

$$a = -0,051085, \eta = -0,03685 \sqrt[4]{p\psi}, R = 211,82, \psi_0 = 273,22,$$

zum Zweck der Berechnung der kalorischen Größen gesichert wurde: 1. mit Hilfe der von Scheel und Heuse bei Helium gemessenen c_p -Daten die in den c_v - bzw. c_p -Ausdrücken eintretenden willkürlichen Integrationskonstanten und Funktion $c(t)$ zu

$$c(t) = 1,2510 + 0,1194 \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \left(\frac{\psi}{100}\right)^{-4}$$

bestimmt; 2. der gemäß der erhaltenen c_p - bzw. c_v -Formeln

$$c_p = c(t) - 0,06112 p e^\eta \left(\frac{t}{\psi} \eta + q \Pi_4\right)$$

bzw.

$$c_v = c_p - AR + 0,05508 p (1 - 11\alpha),$$

$$q = 2 - 5 \frac{t}{\psi}, \Pi_4 = 4! \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3! \eta} + \frac{1}{2! \eta^2} - \frac{1}{1! \eta^3} + \frac{1}{\eta^4}\right), \alpha = \left(1 + \frac{t}{\psi} \eta\right) e^\eta$$

berechnete Gang der beiden Größen tabellarisch bzw. graphisch dargestellt; 3. der Unterschied zwischen den beiden spezifischen Wärmen in Verbindung mit einigen thermodynamischen Eigenschaften (eventuell Joule-Effekt) vom Standpunkt des Auswahltheorems erklärt; 4. die wahren bzw. mittleren Ausdehnungskoeffizienten gemäß den Ausdrücken

$$\alpha = \frac{1}{\psi_0} \left\{1 + \frac{11 ap (1 - \alpha)}{R - 10 ap}\right\} \text{ bzw. } \alpha_m = \frac{1}{\psi_0} \left\{1 + \frac{11 ap (1 - e^\eta)}{R - 10 ap}\right\}$$

berechnet und mit den Experimentaldaten verglichen, und 5. der von der Theorie geforderte, von der Temperaturbedingung unabhängige Übergang zum Clapeyronschen System bei $p = 0$ verifiziert.

1. Anwendbarkeit der Zustandsgleichung bei der Berechnung der kalorischen Größen. Es ist bei der Berechnung der kalorischen Größen — wie spezifische Wärme, Joule-, Joule-Thomson-Effekt usw. unentbehrlich, die Grundforderung der Zustandsgleichungstheorie reeller Körper¹⁾, z. B. in der Hausenschen Konzeption

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t \leq 0$$

¹⁾ Siehe z. B. W. Jacyna, ZS. f. Phys. **37**, 304, 1926; auch **90**, 331, 1934 u. a.

zu verifizieren. Auch gibt diese Verifikation die Antwort auf die Frage, ob und wie weit von der betrachteten vereinfachten Zustandsgleichung

$$vp = R\psi - ap \{10\psi_0 - t(1 - 11e^\eta)\}, \quad (*)$$

$$a = -0,0_51085, \eta = -0,0_3685 \sqrt[4]{p\psi}, R = 211,82, \psi_0 = 273,22$$

die von der Theorie geforderte Auswahlbedingung¹⁾ erfüllt ist. Dabei ist das allgemeine Problem über den physikalischen Sinn, die praktische Zweckmäßigkeit und logische Beweiskraft der formalen Rechnungsoperationen mit der Zustandsgleichung (*) insofern beantwortet, als wir alle möglichen Rechnungsergebnisse dem genauen — wenn auch nicht bedingungslosen — Realitätskriterium von vornherein unterordnen. Wir können unsere Ansichten in Übereinstimmung mit den früheren Betrachtungen (l. c.) veranschaulichen, indem wir einerseits die *Gesamtheit der natürlichen Zustände*, welche der thermodynamischen Erforschung (mittels Zustandsgleichung) zur Verfügung stehen, als das „Anwendungsgebiet“ bezeichnen. Andererseits teilen wir z. B. mit Hilfe der Grenzlinie

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t = \infty$$

die *thermodynamische Fläche* in zwei Teile, welche wir „*Realitäts-*“ (mit $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t \leq 0$) bzw. „*Irrealitätsbereich*“ (mit $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t > 0$) nennen wollen²⁾.

Die in dem Auswahltheorem I ausgedrückte Forderung besteht darin, daß die *Superposition* des Anwendungsgebietes auf der thermodynamischen Zustandsfläche innerhalb des Realitätsbereiches vollständig und möglichst entfernt von dem Irrealitätsbereich ausfallen muß. Demzufolge ist die Beschäftigung mit den sogenannten „labilen“ Zuständen im Sinne der alten Theorie bei der neuen thermodynamischen Behandlungsweise nicht nur verboten, sondern vollständig ausgeschlossen. Also muß auch die Sicherung der gewählten Zustandsgleichung in dieser Hinsicht sorgfältig verfolgt werden.

Differenziert man die Zustandsgleichung (*) nach v bei $t = \text{const}$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t = - \frac{p^2}{R\psi + \frac{11}{4}atp\eta e^\eta}, \quad (**)$$

was nur dann positiv erscheint, wenn der Zustandspunkt die „kritische Grenzlinie“

$$\psi = \infty \quad \text{oder auch} \quad R\psi + \frac{11}{4}atp\eta e^\eta = 0$$

¹⁾ l. c., Theorem I. — ²⁾ Somit unterscheidet sich hier die Rolle der kritischen Bedingung von der in der van der Waalsschen Theorie, wobei mit Hilfe der Bedingung $(\partial p / \partial v)_t = 0$ nur der „kritische Punkt“ allein bestimmbar ist.

überschreitet, weil die Bedingung $p = 0$ in dem betrachteten Fall offenbar keine Vorzeichenänderung schaffen kann. Nun zeigt die Rechnung, daß das Gebiet mit $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t > 0$ das mit $\psi \geq 0$ etwa bei $p = 10000$ Atm. berührt. Also ist das Auswahltheorem¹⁾ bei der Gleichung (*) nicht ohne weiteres erfüllt.

Diese durch die gemachten Vereinfachungen²⁾ verursachte Beschränkung der Zustandsgleichung (*) erweist sich für letztere als theoretische Unvollkommenheit.

Der Umstand aber, daß das Irrealitätsbereich vom Zentralbezirk der Zustandsfläche (mittlere Drucke bzw. Volumina bei nicht zu hohen Temperaturen) auf die Peripherie weit über den Umfang des von uns betrachteten Anwendungsgebietes $0 \leq p \leq 100$ Atm. und $-150^\circ \text{C} \leq t \leq 500^\circ \text{C}$ hinaus entfernt ist, stellt für die Anwendbarkeit der Zustandsgleichung den günstigen Ausspruch dar.

2. Die allgemeine c_v - bzw. c_p -Berechnungsmethode. Man kann die Differenz zwischen den beiden spezifischen Wärmen

$$c_p = c_v = -A \psi \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p^2 \quad (1)$$

mit Hilfe der Zustandsgleichung (*) in der Form

$$c_p = c_v = \frac{A \left\{ R + ap \left[1 - 11 \left(1 + \frac{t}{\psi} \eta \right) e^\eta \right] \right\}^2}{R + \frac{11}{4} ap \frac{t}{\psi} \eta e^\eta} \quad (2)$$

mit den früheren Werten der Konstanten darstellen. Was nun die c_v - bzw. c_p -Werte selbst betrifft, so lassen sich diese auch mit Hilfe der bekannten thermodynamischen Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t = A \psi p_0 \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_v \quad (3)$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_t = -A \psi v_0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_p, \quad (4)$$

wo

$$\beta = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v$$

¹⁾ W. Jacyna, ZS. f. Phys. **90**, 331; **91**, 353, 1934; C. R. de l'Acad. Pol. 1934, 8 (Octobre), Bull. int. de l'Acad. Pol. 1934 u. a. (im Druck). — ²⁾ Vgl. W. Jacyna, Die Eigenschaften der reellen Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung. ZS. f. Phys. **91**, 349, 1934, erste Mitteilung.

und

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p$$

ist, in folgender Weise berechnen.

Betrachten wir jede der beiden spezifischen Wärmen reeller Gase als Funktion von zwei unabhängigen Parametern t und p , so haben wir

$$dc_v = \left(\frac{\partial c_v}{\partial t} \right)_p dt + \left(\frac{\partial c_v}{\partial p} \right)_t dp \quad (5)$$

und

$$dc_p = \left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p dt + \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t dp. \quad (6)$$

Es wird aus theoretischen Gründen die Beschäftigung mit der spezifischen Wärme beim konstanten Volumen c_v bevorzugt. Hier müssen wir uns aber mit der Jakob-Planckschen Methode behelfen, weil die unmittelbaren Experimentaldaten nur für c_p vorliegen. Wir erhalten somit zwei vom mathematischen Standpunkt aus symmetrische und genau äquivalente Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} c_p &= \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p dt + \int \left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t - \frac{\partial}{\partial p} \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p dt \right] dp, \\ &= \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p dt + c(p), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und bzw.

$$\left. \begin{aligned} c_p &= \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t dp + \int \left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p - \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t dp \right] dt, \\ &= \int \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t dp + c(t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir können aber auf Grund des Auswahltheorems (l. c.) nur den Ausdruck (8) zur c_p -Berechnung wählen, weil keinesfalls c_v - bzw. c_p -Temperaturkoeffizienten $\left(\frac{\partial c_v}{\partial t} \right)_p$ bzw. $\left(\frac{\partial c_p}{\partial t} \right)_p$, sondern und zwar nur die Änderungen der spezifischen Wärme mit dem Volumen bzw. Druck bei konstantgehaltener Temperatur für die Zustandsgleichung reeller Körper maßgebend sind.

3. *Berechnung der c_p -Werte.* Dementsprechend erhalten wir mit Hilfe der thermodynamischen Zustandsgleichung (*) zuerst aus (4)

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t = 11 A a \eta e^\eta \left(2 + \frac{t}{\psi} \eta \right) \quad (9)$$

und danach aus (9) und (8)

$$c_p = c(t) + 11 A a \int \left(2 + \frac{t}{\psi} \eta \right) \eta e^\eta dp, \quad (10)$$

wobei $c(t)$ eine Temperaturfunktion ist.

Faßt man ins Auge, daß $\eta = b \sqrt[4]{p} \psi$ und folglich

$$dp = \frac{4 \eta^3 d\eta}{b^4 \psi^4} \quad (11)$$

ist, so erhält man aus (10) nach Substitution von (11)

$$\left. \begin{aligned} c_p &= c(t) + \frac{44 A a}{b^4 \psi^4} \int \left(2 + \frac{t}{\psi} \eta\right) e^\eta \eta^4 d\eta, \\ \text{oder auch} \\ c_p &= c(t) + \frac{44 A a p}{\eta^4} \left(2 \Pi'_4 + \frac{t}{\psi} \Pi'_5\right) = c(t) + \frac{44 A a p}{\eta^4} \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wobei

$$\Phi = 2 \Pi'_4 + \frac{t}{\psi} \Pi'_5$$

ist und die Integrale Π'_4 bzw. Π'_5 gemäß der Formel

$$\begin{aligned} \Pi'_n &= \eta^n e^\eta \Pi_n = \int \eta^n e^\eta d\eta = n! e^\eta \left\{ \frac{\eta^n}{n!} - \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\eta^{n-2}}{(n-2)!} - \dots \pm (\eta-1) \right\} \\ &= e^\eta \{ \eta^n - n \eta^{n-1} + n(n-1) \eta^{n-2} - \dots \pm n! (\eta-1) \} \end{aligned} \quad (13)$$

berechnet sind.

Wegen

$$\Pi'_n = \eta^n e^\eta - n \Pi'_{n-1}$$

erhält man weiter

$$\begin{aligned} \Phi &= \eta^4 e^\eta \left\{ \frac{t}{\psi} \eta + \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \left(1 - \frac{4}{\eta} + \frac{12}{\eta^2} - \frac{24}{\eta^3} + \frac{24}{\eta^4}\right) \right\} \\ &= \eta^4 e^\eta \left\{ \frac{t}{\psi} \eta + \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \Pi_4 \right\} \end{aligned} \quad (13')$$

und danach aus (12) mit Rücksicht auf (13) und (13')

$$\begin{aligned} c_p &= c(t) + 44 A a p e^\eta \left\{ \frac{t}{\psi} \eta + \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \Pi_4 \right\} \\ &= c(t) - 0,06112 p e^\eta \left\{ \frac{t}{\psi} \eta + \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \Pi_4 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

wobei

$$\Pi_4 = \frac{\Pi'_4}{\eta^4 e^\eta} = 4! \left\{ \frac{1}{4!} - \frac{1}{3! \eta} + \frac{1}{2! \eta^2} - \frac{1}{1! \eta^3} + \frac{1}{\eta^4} \right\} \quad (14')$$

bezeichnet ist.

4. Bestimmung der willkürlichen Temperaturfunktionen und Konstanten.

Die vom formalmathematischen Standpunkt aus willkürliche Funktion $c(t)$ können wir aus der Grenzbedingung

$$p = 0$$

bestimmen, weil dabei definitionsgemäß das Gas sich nach dem Clapeyron-schen System verhält. Wir erhalten nämlich aus (14) bei $p = 0$ wegen

$$\lim \left(\frac{p}{\eta^n} \right)_{p=0, n < 4} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \left(\frac{p}{\eta^n} \right)_{p=0, n=4} = \frac{1}{b^4 \psi^4}$$

den folgenden Grenzausdruck

$$\begin{aligned} c_{p=0} &= c(t) + \frac{1056 A a}{b^4 \psi^4} \left(2 - 5 \frac{t}{\psi} \right) \\ &= c(t) - \frac{1056 A a}{10^8 b^4} \left(3 - 5 \frac{\psi_0}{\psi} \right) \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4}, \end{aligned}$$

oder nach Substitution der dabei eintretenden Konstanten in bequemer Form

$$c_{p=0} = c(t) - 0,1220 \left(2 - 5 \frac{t}{\psi} \right) \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4}. \quad (15)$$

Ferner erhalten wir einerseits auf Grund der bekannten Versuche von Scheel und Heuse¹⁾ für Helium unter Atmosphärendruck

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} (c_p)_{t=-180^\circ \text{C}} &= 1,237 \text{ cal/}^\circ\text{C bei } -180^\circ \text{C} \\ (c_p)_{t=18^\circ \text{C}} &= 1,251 \text{ cal/}^\circ\text{C bei } 18^\circ \text{C;} \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

andererseits entnehmen wir aus (9), sowie auch aus den Messungen der Ausdehnungskoeffizienten α , daß im betrachteten Temperaturintervall stets

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right) > 0 \quad (16)$$

sein muß.

Also stellt der Grenzwert $c_{p=0}$ und ebenfalls $c(t)$ keine für das ideale Gas theoretisch geforderte Konstante

$$(c_{id})_{\text{He}} = \frac{5}{2} A R = \frac{5}{2} \cdot \frac{211,82}{426,9} = 1,240 \text{ cal/}^\circ\text{C} \quad (17)$$

dar. Man muß vielmehr unter der Bedingung $p = 0$ den Grenzwert

$$c_{p=0} = (c_p)_{\text{Clapeyr}} = c(t) - 0,1220 \left(2 - 5 \frac{t}{\psi} \right) \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4} \quad (17')$$

als eine mit steigender Temperatur steigende Funktion betrachten. Nun zeigt die einfache auf Grund der Gleichung (9) durchgeführte Rechnung, daß in dem betrachteten Temperaturintervall der größte Grenzwert der Differenz gemäß der folgenden Tabelle nur etwa $0,0003 \text{ cal/}^\circ\text{C}$ beträgt. Folglich lassen sich die von Scheel und Heuse etwa bei 1 Atm.

¹⁾ Karl Scheel u. Wilhelm Heuse, Ann. d. Phys. **40**, 437, 1913.

für Helium gemessenen c_p -Daten auch bei $p = 0$ ohne weiteres beibehalten.

t °C	—150° C	0° C	500° C
$c_{p=1 \text{ Atm.}} - c_{p=0} \dots$	0,000 312	0,000 163	0,000 006 8

Setzen wir hiermit

$$c_{p=0} = c_{p_0} + c_1 \left(2 - 5 \frac{t}{\psi}\right) \left(\frac{\psi}{100}\right)^{-4}, \quad (18)$$

wobei c_{p_0} und c_1 Konstante sind, so können wir die willkürliche Temperaturfunktion $c(t)$ folgendermaßen bestimmen. Offenbar gilt die Formel (18) nur im Anwendungsgebiet der Zustandsgleichung (*), d. h. bis —150° C; dementsprechend können wir mit Rücksicht auf (15') nur eine der beiden experimentellen Daten, nämlich

$$(c_p)_{t=18^\circ \text{C}} = 1,251 \text{ cal/}^\circ \text{C}$$

unmittelbar in der Rechnung anwenden. Das nötige zweite Datum (für —150° C)

$$(c_p)_{t=-150^\circ \text{C}} = 1,242 \text{ cal/}^\circ \text{C}$$

erhalten wir mit Hilfe der auf Grund der Gleichung (15) durchgeführten *nichtlinearen* Interpolation¹⁾. Die Resultate sind, in der Absicht, den Vergleich mit den *linearen* Interpolations- bzw. Extrapolationswerten zu erleichtern, in folgender Tabelle 1 zusammengestellt (vgl. auch Fig. 2).

Tabelle 1. Vergleichstabelle für die Resultate verschiedener Interpolations bzw. Extrapolationsverfahren der von K. Scheel und W. Heuse u. a. gemessenen c_p -Daten des Heliums.

Bereich	Interpolationsbereich						Extrapolationsbereich			
Temperatur t °C	—180	—150	—100	—50	0	18	100	200	300	500
Experimentiert nach										
K. Scheel u. W. Heuse . .	1,237	—	—	—	—	1,251	—	—	—	—
Nach A. Eucken u. O. Mücke	—	—	—	—	—	—	—	—	1,241	—
Interpoliert bzw. extrapoliert gemäß der Gleichung (15) .	—	1,242	1,249 ₅	1,250 ₅	1,251	1,251	1,251	1,251	1,251	1,251
Lineare, Interpolation bzw. Extrapolation	1,237	1,239	1,242 ₅	1,246	1,249 ₅	1,251	1,256	1,263	1,270	1,284

¹⁾ Es ist die gewöhnlich benutzte lineare Interpolation aus mehreren Gründen unzulässig (vgl. Tabelle 1, Fig. 2 u. ff.).

Daraus erhalten wir nach der einfachen Rechnung

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} c_1 &= -0,00257 \\ c_{p_0} &= 1,2510, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

folglich

$$c_{p=0} = 1,2510 - 0,00257 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4}, \quad (20)$$

was mit Rücksicht auf (15) ergibt

$$c(t) = 1,2510 - 0,1194 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4} \quad (21)$$

und schließlich aus (14)

$$c_p = 1,251 + 0,1194 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4} - 0,06112 p e^{\eta} \left(\frac{t}{\psi} \eta + \varrho \Pi_4 \right), \quad (22)$$

wobei

$$\varrho = 2 - 5 \frac{t}{\psi} = - \left(3 - 5 \frac{\psi_0}{\psi} \right) \quad (23)$$

und

$$\Pi_4 = 1 - \frac{4}{\eta} + \frac{12}{\eta^2} \left(1 - \frac{2}{\eta} + \frac{2}{\eta^2} \right) \quad (24)$$

bezeichnet ist.

Die gemäß der Gleichung (22) berechneten c_p -Werte sind in der Tabelle 2 und bzw. in der Fig. 1 und 2 mit Hilfe der c_p -Isothermen bzw. c_p -Isobaren dargestellt¹⁾.

Tabelle 2. Die c_p -Werte für Helium auf Grund der Gleichung (22).
Druckeinheit 10^{-4} kg/m^2 .

$t \text{ } ^\circ\text{C}$ 10^{-4} kg/m^2	-150	-100	0	300	500
0	1,242	1,249 ₅	1,251	1,251	1,251
1	1,242	1,249 ₅	1,251	1,251 ₁	1,251 ₁
10	1,242 ₃	1,250 ₅	1,252	1,251	1,251
30	1,245	1,254	1,253	1,251	1,251
50	1,259	1,259	1,253 ₅	1,251	1,251
70	1,265	1,261	1,253 ₅	1,251	1,251
100	1,270	1,263	1,254	1,250 ₉	1,250 ₉

¹⁾ Also stellt c_p oberhalb 0°C unseren Berechnungen gemäß eine vom Druck und von der Temperatur praktisch unabhängige Größe dar. Dies ist durch die spektroskopischen auf Grund des Raman-Effektes mit Hilfe der Einstein-Planckschen Formel durchgeführten c_p -Berechnungen von A. Eucken u. O. Mücke [ZS. f. phys. Chem. (B) 18, 167, 1932] bestätigt. Es ist sogar nach genannten Forschern bei $t = 418^\circ \text{C}$ $(c_p)_{t=418} = 1,241 \text{ cal/}^\circ \text{C}$, d. h. kleiner als der von K. Scheel und W. Heuse bei $t = 18^\circ \text{C}$ gemessene Wert $(c_p)_{18} = 1,251 \text{ cal/}^\circ \text{C}$. Somit ist die lineare Extrapolation (Fig. 2) vollständig unhaltbar.

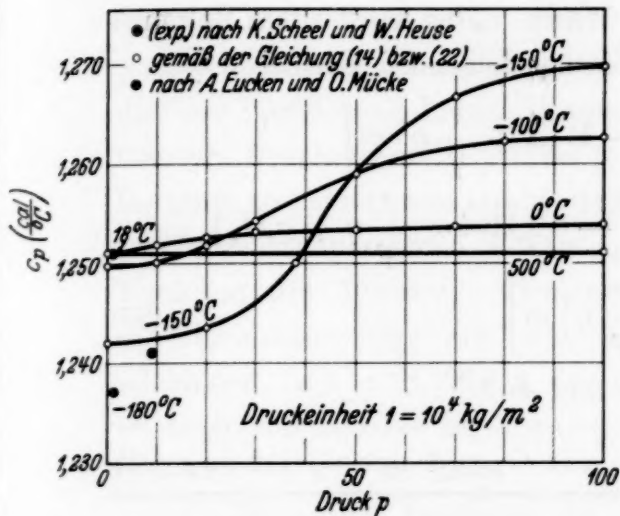


Fig. 1. Die spezifische Wärme c_p des Heliums in Abhängigkeit vom Druck und von der Temperatur auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung (*). c_p -Isobaren sind gemäß der Formel (22) mit den Integrationskonstanten nach den Versuchen von K. Scheel und W. Heuse berechnet.

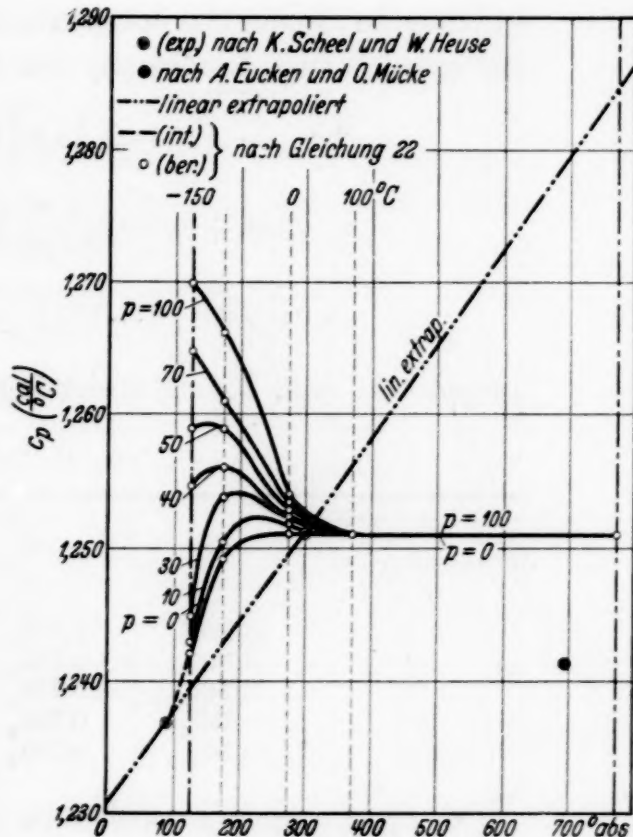


Fig. 2. Abhängigkeit der spezifischen Wärme c_p des Heliums vom Druck und von der Temperatur auf Grund der vereinfachten thermodynamischen Zustandsgleichung (*). Die „ c_p -Isobaren“ sind gemäß der Formel (22) mit den Integrationskonstanten nach den Versuchen von K. Scheel und W. Heuse berechnet. Druckeinheit 10^4 kg/m^2 .

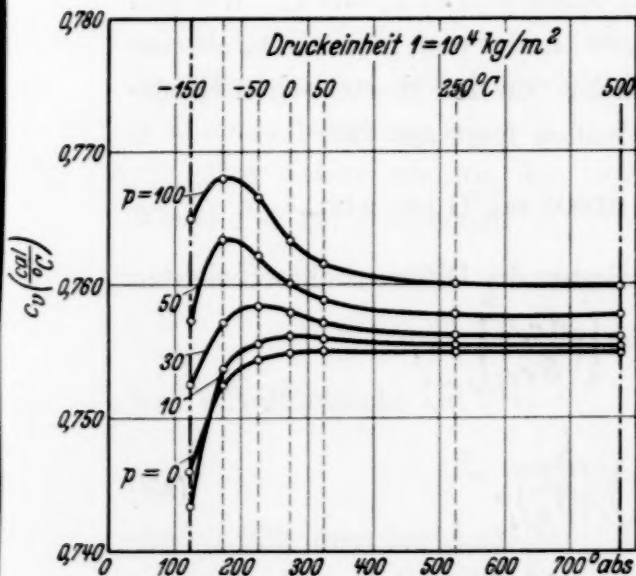


Fig. 4. Abhängigkeit der spezifischen Wärme c_v des Heliums vom Druck und von der Temperatur auf Grund der vereinfachten thermodynamischen Zustandsgleichung (*). Die „ c_v -Isobaren“ sind gemäß der Formel (25) mit den Integrationskonstanten auf Grund der Versuche von K. Scheel und W. Heuse berechnet.

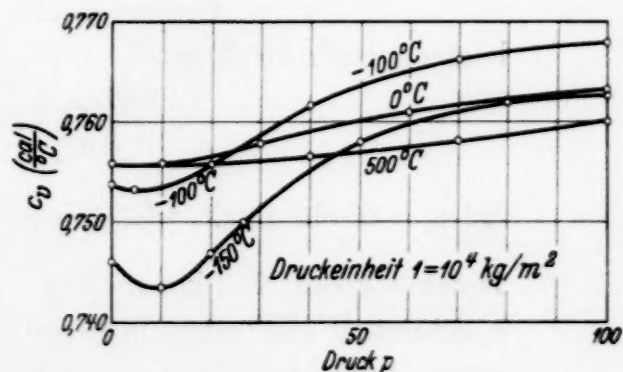


Fig. 3.

Die „ c_v -Isothermen“ gemäß der Gleichung (25).

5. Die Berechnung von c_v -Werten. Ferner haben wir auf Grund der Gleichungen (2) und (22) die spezifische Wärme c_v bei konstantem Volumen mit hinreichender Annäherung mit Hilfe der folgenden Formel

$$\begin{aligned} c_v &\cong c_p - A R - 2 A a p \left[1 - 11 \left(1 + \frac{t}{\psi} \eta \right) e^\eta \right] \\ &= 0,755 + 0,1194 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4} - 0,01194 e^\eta \left(\frac{t}{\psi} \eta + \varrho \Pi_4 \right) \\ &\quad + 0,08508 p \left[1 - 11 \left(1 + \frac{t}{\psi} \eta \right) e^\eta \right] \end{aligned} \quad (25)$$

ausgedrückt (vgl. Tabelle 3 und Fig. 3 und 4).

Tabelle 3. Die c_v -Werte für Helium auf Grund der Gleichung (25).

$t \text{ } ^\circ\text{C}$ 10^{-4} kg/m^2	-150	-100	0	300	500
0	0,7460	0,753 ₅	0,7550	0,7550	0,7550
1	0,745 ₅	0,753 ₃	0,755 ₀	0,754 ₇	0,754 ₉
10	0,743 ₃	0,753 ₆	0,756 ₃	0,755 ₅	0,755 ₅
50	0,757 ₄	0,763 ₄	0,759 ₈	0,757 ₅	0,757 ₅
100	0,762 ₅	0,768 ₀	0,762 ₉	0,760 ₀	0,760 ₀

6. Der Unterschied zwischen der spezifischen Wärme c_v und c_p . Wie sich aus der Gleichung (25) und der Fig. 3 ergibt, findet man hiernach c_v als eine für die Abweichungen der Zustandsgleichung von den theoretischen Grenzformen empfindlichere Größe als c_p . Freilich folgt aus (25)

$$\left[\left(\frac{\partial c_v}{\partial p} \right)_t \right]_{p=0} = 20 A a = -0,0005 \text{ cal/}^\circ\text{C pro Atm.,}$$

d. h. nicht Null. Demgegenüber verschwinden die Differentialkoeffizienten

$$\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t \right]_{p=0} \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_t \right]_{p=0},$$

letzterer nach der Formel

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_t = \left(\frac{\partial c_v}{\partial p} \right)_t \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_t, \quad (25')$$

bei $p = 0$ sehr rasch, weil dabei $\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_t$ gemäß (**) mit dem Quadrat des Druckes gegen Null konvergiert. Also stellt auch in dieser Hinsicht die c_v -Änderung ein empfindlicheres Kriterium als die von c_p dar. Endlich verwandeln sich die beiden spezifischen Wärmen c_v bzw. c_p bei $p = 0$ gemäß den Gleichungen (22) bzw. (25) selbst in reine Temperaturfunktionen $(c_v)_{p=0} = 0,755 - 0,00257 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4}$ bzw. $(c_p)_{p=0} = 1,251 - 0,00257 \varrho \left(\frac{\psi}{100} \right)^{-4}$

mit identischen Funktionalteilen, was ja beim Clapeyronschen System wirklich stattfinden muß. Es ist aber die Rolle der beiden Größen bei $p \neq 0$ überhaupt verschieden. Man ersieht nämlich aus der Gleichung (22), daß bei hinreichend hohen Temperaturen die spezifische Wärme bei konstantem Druck ebenfalls wie bei $p = 0$ sich wenigstens in die Temperaturfunktion zu verwandeln strebt; demgegenüber verhält sich bei Temperaturerhöhung die spezifische Wärme c_v auf Grund der Gleichung (25) wie eine Funktion des Druckes. Dementsprechend muß auch der Joule-Effekt in Übereinstimmung mit dem Auswahltheorem (l. c.) keineswegs verschwinden (vgl. z. B. Fig. 2 der vorstehenden Mitteilung II). Letzteres ist auch von anderer Seite durch die Messungen und Berechnungen von Roebuck u. a.¹⁾ bestätigt.

7. *Allgemeine Ausdrücke der wahren und mittleren Spannungskoeffizienten β und β_m .* Es ist bei Anwendung der Thermodynamik der wahre F von dem mittleren F_m -Wert der Funktion $F(x, y)$ gemäß den Formeln

$$F = F_m + (x - x_0) \left(\frac{\partial F_m}{\partial x} \right)_y \quad (26)$$

bzw.

$$F_m = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x F dx \quad (26')$$

zu unterscheiden, wobei der Mittelwert F_m im Intervall von x_0 bis x bei $y = \text{const}$ bestimmt ist.

Also haben wir für den mittleren Spannungskoeffizienten zwischen 0 und t^0 C bei $p = \text{const}$

$$\beta_m = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{t} \int_0^t \beta dt, \quad (27)$$

was mit Rücksicht auf (*)

$$\beta_m = \frac{1}{\psi_0} \left\{ 1 + \frac{ap}{R} (1 - 11 e^r) \right\} \quad (28)$$

ergibt, falls man ins Auge faßt, daß

$$p_0 = \frac{R \psi_0}{v + 10 a \psi_0} \quad (29)$$

ist. Hiermit folgt aus (26) — oder auch mit (29) auf Grund der Definition unmittelbar — für den wahren Spannungskoeffizienten

$$\beta = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_v = \frac{1}{\psi_0} \left\{ 1 + \frac{ap}{R} (1 - 11 z) \right\} \frac{1 + r}{1 + s}, \quad (30)$$

¹⁾ l. c., Mitteilung II.

wobei

$$\kappa = \left(1 + \frac{t}{\psi} \eta\right) e^\eta \quad (31)$$

$$r = \frac{a p t}{R \psi} (1 - 11 e^\eta) \quad (32)$$

und

$$s = \frac{11}{4} \frac{a p t}{R \psi} \eta e^\eta \quad (33)$$

bezeichnet und $\left(\frac{\partial \beta_m}{\partial t}\right)_v$ bzw. $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v$ gemäß den Formeln

$$\left(\frac{\partial \beta_m}{\partial t}\right)_v = \left(\frac{\partial \beta_m}{\partial t}\right)_p - \left(\frac{\partial \beta_m}{\partial v}\right)_t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v = - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_t \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p$$

berechnet ist.

8. Die Werte der Ausdehnungskoeffizienten α bzw. α_m . Ähnlicherweise erhalten wir für den Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha_m = \frac{v - v_0}{v_0 t} = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha dt, \quad (34)$$

wobei mit Rücksicht auf (*)

$$v_0 = \frac{(R - 10 a p) \psi_0}{p} = v_0(p) \quad (35)$$

ist, oder

$$\alpha_m = \frac{1}{\psi_0} \left(1 + \frac{11 a p (1 - e^\eta)}{R - 10 a p}\right) \quad (36)$$

bzw.

$$a = \frac{1}{\psi_0} \left(1 + \frac{11 a p (1 - \kappa)}{R - 10 a p}\right), \quad (37)$$

wobei κ die frühere Bedeutung (31) hat.

Die wahren nach Gleichung (37) berechneten α -Werte sind in der Tabelle 5 enthalten und zeigen von den experimentell bestimmten nur unbedeutende Abweichungen. Die mittleren Ausdehnungskoeffizienten α_m ändern sich gemäß der Gleichung (36) (vgl. auch Tabelle 4) mit der Temperatur, sowie ebenfalls mit dem Druck stets monoton. Es ist aber auf Grund der Gleichung (9) leicht ersichtlich, daß das Gebiet, wo

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_p > 0$$

und bzw.

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_t < 0$$

sind, von 300° C bei etwa 1 Atm. sich mit steigendem Druck nach der Seite der niedrigeren Temperaturen verschiebt.

Tabelle 4. Die mittleren Ausdehnungskoeffizienten $10^6 \alpha_m$ des Heliums. Erste Zeile (exper.) Experimentaldaten nach L. Holborn und J. Otto; zweite Zeile (ber.) berechnet gemäß der Gleichung (36).

$t \text{ } ^\circ\text{C}$ $p \text{ kg/m}^2$	—150	—100	—50	0	100	300	500
0 ber. ¹⁾	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1
10^4 { exper.	3659	3659	3658 ₅	—	3658	3658	—
{ ber.	3659	3659	3658 ₅	3658	3658	3658	3658
10^5 { exper.	3643	3642	3641	—	3639 ₅	3639	—
{ ber.	3644	3642	3641	3640	3639 ₅	3639	3639
10^6 { exper.	3479	3466	3460	—	3463	3463	—
{ ber.	3478	3468	3465	3464	3464	3463 ₅	3463 ₅

Tabelle 5.

Die wahren $10^6 \alpha$ -Werte des Heliums gemäß der Gleichung (37).

$t \text{ } ^\circ\text{C}$ $p \text{ kg/m}^2$	—150	—100	—50	0	100	300	500
0	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1	3660,1
10^4	3660	3659	3658 ₅	3658	3658	3658	3658
10^5	3653	3646	3643	3642	3642	3642	3642
10^6	3523	3476	3469	3465	3464	3464	3464

9. Die Gay-Lussac-Charlesschen Zustände und der Übergang zur Clapeyronschen Form bei $p = 0$. Tatsächlich folgt auf Grund der thermodynamischen Hauptsätze, daß für die Parameterwerte t_1 und p_1 , bei welchen

$$\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_p \right]_{t=t_1, p=p_1} = 0$$

ist, d. h. für die Zustände, in denen das Gay-Lussac-Charlessche Gesetz vollständig ist, auch

$$\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_p \right]_{t=t_1, p=p_1} = 0$$

sein muß. Differenziert man die Gleichung (37) nach t bei $p = \text{const}$, so folgt

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_p = - \frac{11 a p^{5/4} e^\eta}{\psi_0 (R - 10 a p)} \left(2 + \frac{t}{\psi} \eta \right). \quad (38)$$

Also ist die oben erwähnte Forderung der Thermodynamik

$$\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_p \right]_{t=t_1, p=p_1} = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_p \right]_{t=t_1, p=p_1} = 0$$

mit Rücksicht auf (4) und (11) stets erfüllt.

¹⁾ Näheres über die Berechnungen dieser Zeile vgl. W. Jacyna, Acta Phys. Pol. 2, 419, 1934.

Tabelle 6. Die Gay-Lussac-Charlesschen Zustände für Helium auf Grund der Zustandsgleichung (*) bzw. (39).

p_1 kg/m ²	0	1	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶
t_1 °C	(∞)	(2920)	292	164	92,4

Die in der Tabelle 6 enthaltenen Parameterwerte sind gemäß der Gleichung¹⁾

$$2 - 0,000685 t \sqrt[4]{p} = 0 \quad (39)$$

berechnet und stellen in der Fig. 5 die sogenannte Gay-Lussac-Charlesche Linie dar. Letztere fällt mit der Linie von $\mu_J c_p$ -Extremwerten beim Joule-Thomson-Effekt zusammen.

Aus sämtlichen Gleichungen für c_v bzw. c_p folgt schließlich bei $p = 0$

$$(c_v)_{p=0} = c(t)$$

bzw.

$$(c_p)_{p=0} = c_p(t) = c(t) + AR;$$

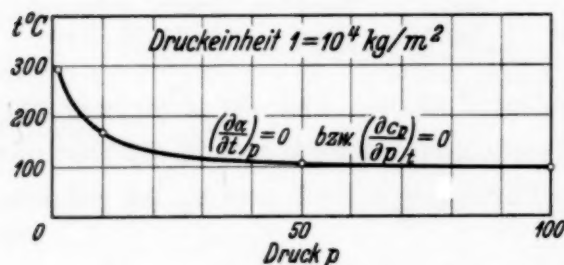


Fig. 5. Die Gay-Lussac-Charlesschen Zustände [$\alpha = \text{const}$, $c_p = c_p(t)$] auf Grund der vereinfachten thermodynamischen Zustandsgleichung (*).

ferner auf Grund der Gleichung (25) oder (25') und bzw. Gleichung (9) oder (22)

$$\left[\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_t \right]_{p=0} = 0$$

bzw.

$$\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_t \right]_{p=0} = 0,$$

und endlich ergibt sich aus (30) und (28) bzw. (37) und (36)

$$(\beta)_{p=0} = (\beta_m)_{p=0} = \frac{1}{\psi_0} = \beta_{id} \text{ bzw. } (\alpha)_{p=0} = (\alpha_m)_{p=0} = \frac{1}{\psi_0} = \alpha_{id},$$

d. h. der Übergang zum Clapeyronschen System findet in Übereinstimmung mit den Forderungen der neuen Zustandstheorie mit der unbegrenzten Druckaufnahme unabhängig von der Temperaturbedingung statt.

Leningrad, August 1934.

¹⁾ Vgl. dazu Gleichung (8) der ersten Mitteilung von der Serie: Die Eigenschaften der reellen Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung, I. c.

Bestätigung des Jacynaschen Auswahltheorems am Helium.

Von W. Jacyna, S. Derewjankin, A. Obnorsky und T. Parfentjew in Leningrad.

(Eingegangen am 16. Oktober 1934.)

Das Auswahltheorem wird bestätigt und die van der Waalssche Kohäsion verliert die frühere Bedeutung, insofern die von W. Jacyna entdeckte kalorische $C(\Gamma)$ -Wirkung (bzw. $(\frac{\partial U}{\partial v})_t$ bei Helium wirklich negativ erscheint. Die „Kollisionshypothese“ stellt ein mechanisches Modell der Γ bzw. $C(\Gamma_v)$ -Wirkung dar.

Die Vollständigkeit der Aussage, daß die vom Volumen unabhängige spezifische Wärme c_v (d. h. $(\frac{\partial c_v}{\partial v})_t = 0$) der vom Volumen unabhängigen inneren Energie U (d. h. $(\frac{\partial U}{\partial v})_t = 0$) entspricht, ist eine äußerst elementare und allgemein anerkannte Tatsache. Auch ist dies auf Grund der Definition $c_v = (\frac{\partial U}{\partial t})_v$ ja formal mathematisch unmittelbar ersichtlich. Demgegenüber ist der rein formale Beweis der reziproken bzw. umgekehrten Schlußfolgerung (Jacynaschen Auswahltheorem) ohne Bezugnahme auf das physikalische Wesen des Problems kaum durchführbar¹⁾. Die van der Waalsche Theorie der Zustandsgleichung spricht solchen Beweisführungen sogar jeden physikalischen Sinn ab, indem dabei die innere Energie mit Hilfe der voneinander getrennten Funktionen des Volumens $f(v)$ und der Temperatur $F(t)$, abgesehen von der physikalischen Seite der Bedingung $c_v = c_v(t)$, additionell darstellbar ist. Es ist dabei also formal-mathematisch $U = F(t) + f(v)$ angenommen.

Im Gegensatz dazu²⁾ ergibt das von W. Jacyna auf physikalischem Boden aufgestellte Auswahltheorem³⁾, daß die innere Energie reeller Körper

¹⁾ Vgl. z. B. W. Jacyna, ZS. f. Phys. **37**, 304, 1926; C. R. d. l'Acad. Pol. d. sc. Cl. math. 1934, Nr. 8 (Octobre) u. a. — ²⁾ Näheres W. Jacyna, S. Derewjankin, A. Obnorsky u. T. Parfentjew, ZS. f. Phys. **89**, 370; auch **90**, 331, 1934 u. a. — ³⁾ W. Jacyna, System von Clapeyron und ideales Gas. Petrograd, Verlag „Academia“, 1922/23 (Dissertationsarbeit, russisch); auch ZS. f. Phys. **25**, 133; **30**, 372, 376, 1924 u. a.

entweder die Form $U = F(t)$ oder im allgemeinen $U = F(t, v) + f(v)$ haben muß und dementsprechend

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t = \left(\frac{\partial F(t, v)}{\partial v}\right)_t + \frac{\partial f(v)}{\partial v}$$

oder

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t = C(\Gamma_v) + \Gamma_v \quad (1)$$

ist¹⁾.

Hier bezeichnet Γ_v den spezifischen Teil der isothermischen U -Änderung, welche nur von der direkten molekularen „*Fern-Kraftwirkung*“ (eventuelle Kohäsion) abhängt. Hingegen bedeutet der andere mit $C(\Gamma_v)$ bezeichnete Teil die U -Änderung (die „*Nahwirkung*“), welche von ganz anderer Natur ist, und zwar sich unabhängig von der Kohäsion abspielt. Die eigentlichen Ursachen dieses mit $C(\Gamma_v)$ bzw. $C(\Gamma)$ bezeichneten Phänomens entbehrten in den bisherigen Vorstellungen außer der Dissoziation und Assoziation der Anschaulichkeit.

W. Jacyna hat diese zuerst im Jahre 1924 thermodynamisch nachgewiesene, dem Mechanismus nach auch jetzt noch vollständig unbekannte Auslösung bzw. Anhäufung der inneren Energie die *kalorische, indirekte oder passive* Wirkung der inneren Konstitution der Körper genannt²⁾. Sofern die alte Theorie die isothermischen U -Änderungen und folglich die Abweichungen der Körper vom Idealzustand vorwiegend mit Hilfe der Kraftvorstellung Γ_v zu erschöpfen sucht, findet dabei die auf Grund des Jacynaschen Theorems erfaßte kalorische $C(\Gamma_v)$ -Wirkung keine Anerkennung.

Es ist in der alten van der Waalsschen Theorie vielmehr $C(\Gamma_v) = 0$ und aus (1) demzufolge

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t = \Gamma_v \quad (2)$$

überall vorausgesetzt.

¹⁾ Es ist $C(\Gamma_v) = \left(\frac{\partial F(t, v)}{\partial v}\right)_t = C(\Gamma) + \Gamma - \Gamma_v$ und $\Gamma_v = \frac{\partial f(v)}{\partial v}$ wobei wie früher (ZS. f. Phys. **30**, 376, 1924; **37**, 304, 1926)

$$C(\Gamma) = \int_0^\psi \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t d\psi = A p_{t=0} \int_0^\psi \psi \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_v d\psi \quad \text{und} \quad \Gamma = -A p_{\psi=0} \text{ ist.}$$

Offenbar erscheint bei $c_v = c_v(t)$ notwendigerweise $C(\Gamma) = C(\Gamma_v) = 0$, weil dabei auf Grund des Auswahltheorems auch $\Gamma = \Gamma_v = 0$ ist. — ²⁾ W. Jacyna, ZS. f. Phys. **30**, 376, 1924.

Aber diese Theorie verfiel selbst in unüberwindliche Schwierigkeiten. Insbesondere erscheint bei Helium die Vorstellung über Kohäsionskraft im Lichte der Fortentwicklung der Thermodynamik vollständig unhaltbar. Die gegenwärtigen Messungen und Berechnungen lassen erkennen, daß die innere Energie des Heliums in ganz anderer Weise, als dies der alten Theorie nach zu erwarten ist, vom Volumen abhängt. Die innere Energie des Heliums fällt nämlich bei *isothermischer Ausdehnung* ab und *wächst* bei *Kompression*, so daß

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t < 0$$

ist, was sich im krassen Widerspruch zu der alten Theorie befindet, weil letztere fordert, daß stets $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t > 0$ sei.

Das Auswahltheorem weist aber darauf hin, daß wenigstens für Gase die Beziehung¹⁾

$$|C(\Gamma_v)| \gg |\Gamma_v|$$

besteht und folglich mit Rücksicht auf (1)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) \cong C(\Gamma_v) \quad (3)$$

ist. Die Gültigkeit der Gleichung* (3) ist bekanntlich für Wasserdampf bestätigt²⁾. Ferner ergeben im Laufe des letzten Jahrzehntes die Messungen

¹⁾ Statt dem früheren unrichtigen $C(\Gamma) \gg \Gamma$ (vgl. ZS. f. Phys. **30**, 376, 378, 1924 und **37**, 305, 1926). Im allgemeinen kann man bei $c_v = c_v(t, v)$ auf den Jacynaschen Nahwirkungsteil Γ von der gesamten Nahwirkung $C(\Gamma_v)$ nicht unmittelbar, sondern nur auf Grund der experimentellen Bestimmung der Größen $(\partial U/\partial v)_t$ und $(\partial c_v/\partial v)_t$ schließen. Die Nahwirkung Γ ist nämlich gemäß der Gleichung

$$\Gamma = -Ap_{\psi=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t - \int_0^\psi \left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_t d\psi = \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_t - Ap_{t=0} \int_0^\psi \psi \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_v d\psi = C(\Gamma_v) - C(\Gamma) + \Gamma_v$$

bestimmbar, wo $\beta = \frac{1}{p_{t=0}} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v$ den Spannungskoeffizienten bedeutet. —

²⁾ R. Eichelberg, Forschungsarbeiten, V. D. I., Heft 220, 1920; vgl. dazu W. Jacyna, S. Derewjankin, A. Obnorsky u. T. Parfentjew, ZS. f. Phys. **89**, 370; **90**, 331, 1934 u. a.

und Berechnungen, die von Holborn und Otto, Jacyna u. a.¹⁾ in dem Zeitraum 1925 bis 1929, sowie diejenigen, welche im letzten Jahre von Roebuck und Osterberg²⁾ u. a. durchgeführt worden sind, daß im weiten Bereich der Zustände (etwa von -73 bis 300°C für verschiedene Drucke von 1 bis 100 Atm.) die isothermische U -Änderung des Heliums wesentlich negativ erscheint und der Jacynaschen Näherungsformel³⁾

$$C(\Gamma_v) = -0,00125 p_{\text{Atm.}}^2 (\text{cal } m^{-3}/\text{kg}) \quad (4)$$

gemäß von 0 bis 500°C und von 10 bis 100 Atm. bestimmbar ist. Hiermit bestätigt sich von den beiden Ausdrücken, dem klassischen (2) und dem Jacynaschen (3), bei Helium nur der letztere, während der Ausdruck (2) der alten Theorie zu unlösbarem Widerspruche führt.

Neuerdings sind Versuche gemacht worden, diese Lücke der alten Theorie statistisch und quantentheoretisch auf Grund der ad hoc gemachten „Kollisionshypothese“ auszufüllen⁴⁾.

Dieser Hypothese gemäß ist, in Übereinstimmung mit unseren Ansichten, die oben erwähnte U -Änderung bei Helium keineswegs mit Hilfe der direkten Fernwirkung der Kohäsion (Γ_v), sondern durch die vorwiegende Nahwirkung $C(\Gamma_v)$ zu erklären. Letztere wird hiernach selbst als Energieanhäufung bei dem in *endlicher Zeit* verlaufenden Berührungsprozeß der zusammenstoßenden Moleküle bestimmt. Bemerkenswert ist, daß dies im wesentlichen mit dem innerballistischen Problem eng verknüpfte *mechanische Modell der $C(\Gamma_v)$ -Wirkung* bei dem Bau der Zustandsgleichung überhaupt zur vollständigen Eliminierung der Γ_v -Wirkung aus der molekular theoretischen Betrachtung führen kann⁵⁾.

Dennoch ist auch die Γ_v -Wirkung bei einigen Autoren, wenigstens in einigen bestimmten Fällen (z. B. bei Luft), noch beibehalten⁶⁾. Wir müssen aber hier ausdrücklich betonen, daß, wenn auch eine von diesen beiden Konzeptionen oder noch irgendein anderes Modell der $C(\Gamma_v)$ -Wirkung als richtig erwiesen wird, dies auf die von uns entwickelte Theorie ohne Einfluß ist. Ist doch die theoretische Berechtigung solcher Konstruktionen, sowie

¹⁾ L. Holborn u. J. Otto, ZS. f. Phys. **30**, 320, 1924; **33**, 1, 1925; **38**, 359, 1926; auch W. Heuse u. J. Otto, Ann. d. Phys. **2**, 1012, 1929 u. a. —

²⁾ J. R. Roebuck u. H. Osterberg, Phys. Rev. **43**, 60, 1933; **45**, 332, 1934 u. a. — ³⁾ W. Jacyna, Eigenschaften reeller Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung (Mitteilung II). ZS. f. Phys. **92**, 204, 1934.

— ⁴⁾ Siehe z. B. G. Schweickert, ZS. f. Phys. **90**, 355, 1934; auch J. R. Roebuck u. H. Osterberg, l. c. — ⁵⁾ G. Schweickert, l. c. — ⁶⁾ J. R. Roebuck u. a., l. c.

der Kollisionshypothese selbst, vom *thermodynamischen* Standpunkt aus, nur auf Grund des Jacynaschen Auswahltheorems möglich. Freilich scheint uns, daß die befriedigende Antwort auf die Frage nach der Natur der Dinge vielleicht in dem naiv-angenommenen Bilde des „universellen Substanzstückchens“ von Epikur und Demokrit, vielmehr aber in neuen, mit den Entdeckungen und Ideenkreisen von C. V. Raman, L. de Broglie und E. Schrödinger verknüpften Ansichten zu suchen ist. Das Bedürfnis nach der Kollisionshypothese sowie nach ähnlichen Konstruktionen bei molekulartheoretischen Betrachtungen ist aber schon an und für sich ein direkter Hinweis auf die Unentbehrlichkeit des thermodynamischen Kriteriums und die Bewährtheit des Auswahltheorems bei dem Bau der Zustandsgleichung reeller Gase.

Leningrad, September 1934.

Bemerkungen zu der Arbeit von G. Schweikert: „Zur Theorie der Zustandsgleichung. I.“¹⁾

Von R. Becker in Berlin.

(Eingegangen am 23. September 1934.)

In der genannten Arbeit ist nach Angabe des Verfassers (S. 372) „eine fundamental neue Theorie der spezifischen Wärmen, insbesondere der Gase geschaffen worden, die sich ganz grundsätzlich von der bisher gültigen, aber ihrem ganzen Wesen nach durchaus unbefriedigenden Theorie unterscheidet. Diese neue Theorie wird trotz ihrer prinzipiellen Einfachheit den wirklichen Verhältnissen mit großer Genauigkeit gerecht und besitzt für die mechanische Wärmetheorie weittragende und grundlegende Bedeutung“. Angesichts dieses Anspruchs muß gesagt werden, daß die Schweikertsche Theorie sich größtenteils nur durch eine Reihe von groben und elementaren Fehlern von der bisher gültigen unterscheidet, und daß sie den wirklichen Verhältnissen viel weniger als die bisherige Theorie gerecht wird.

Betrachten wir zunächst den § 2 der genannten Arbeit, welcher die Theorie der spezifischen Wärme enthält. Wir beschränken uns dabei auf den idealen Gaszustand, da die dort gegebene zahlenmäßige Prüfung sich allein auf diesen Fall erstreckt; d. h. wir setzen überall die für die Abweichung vom idealen Zustand charakteristische Schweikertsche Größe k gleich 1. Nach Schweikert besteht die kinetische Energie der Moleküle lediglich in der Translationsenergie des Molekülschwerpunktes $\frac{1}{2} m \bar{c}^2$. Demnach sollte man erwarten, daß seine Ergebnisse mit den experimentellen Werten der einatomigen Gase übereinstimmen. Trotzdem erhält er für c_v und c_p/c_v Werte, welche mit denen der zweiatomigen Gase nahe übereinstimmen. Das kommt in folgender Weise zustande: Bedeutet a die x -Komponente der Geschwindigkeit und n die Zahl der Moleküle im cm^3 , so ist bekanntlich $p = n m \bar{a}^2$, was seit vielen Jahrzehnten in vielen Lehrbüchern der Physik bewiesen wird²⁾. Diese Gleichung ersetzt Schweikert (S. 362) durch $p = n m \overline{|a|}^2$, indem er statt des Mittelwertes des Quadrates das Quadrat des Mittels des Absolutbetrages schreibt. Zur Begründung gibt er an, der Druck sei proportional dem Produkt aus mittlerer Stoßzahl und mittlerer Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche. Der Fehler in der Schweikertschen Druckberechnung besteht in folgendem: In seiner Gleichung S. 362

$$p \approx \sum n m a_n = m N \bar{a}$$

¹⁾ G. Schweikert, ZS. f. Phys. **90**, 355, 1934. — ²⁾ Z. B. Cl. Schaefer, Lehrbuch der theoret. Physik II, 1. Teil, S. 328–330; G. Jäger, Handbuch der Physik IX, S. 345, 348.

ist die Summe über alle in einer Sekunde auftreffenden Moleküle auszuführen. Die so eingeführte Größe \bar{a} bezieht sich also auf den Mittelwert aller *auf-treffenden* Moleküle. In der nachfolgenden Gleichung (5), S. 363 wird aber nach Maxwell das Mittel über die im ganzen *vorhandenen* Moleküle gebildet. Die beiden Mittel sind nicht gleichwertig, weil schnellere Moleküle im Durchschnitt häufiger auf die Wand treffen als langsamere.

Nach der Maxwell-Verteilung ist aber $\overline{a^2} = \frac{\pi}{2} |\bar{a}|^2$. Infolgedessen tritt bei Schweikert für die kinetische Energie der Translation der Wert $E = \frac{3\pi}{4} RT$ an die Stelle des richtigen $E = \frac{3}{2} RT$. Dadurch wird

$$(c_v)_0 = \frac{3\pi}{4} R = 2,36 R \quad \text{und} \quad \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{4}{3\pi} = 1,42$$

in naher Übereinstimmung mit den bekannten Werten der zweiatomigen Gase N_2 , O_2 , H_2 (andere Gase werden in der Arbeit nicht zum Vergleich herangezogen). Der Wert von c_v wird nun (S. 369) noch in folgender Weise „verbessert“: Aus $E = \frac{3\pi}{4} pv$ folgt unter Einführung des thermischen Spannungskoeffizienten α_p

$$c_v = \frac{3\pi}{4} \alpha_p pv,$$

wo α_p offenbar die Bedeutung $\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$, also für ideale Gase den Wert $1/T$ besitzt. Indem Schweikert dafür irrtümlich $1/T_0$ ($T_0 = 273^\circ \text{K}$) setzt, erhält er

$$c_v = \frac{3\pi}{4} \frac{T}{T_0} R.$$

Für $t = 18^\circ \text{C}$ wird nun $\frac{3\pi}{4} \frac{T}{T_0}$ tatsächlich gleich 2,5, dem richtigen Wert für zweiatomige Gase! Schweikert bucht es als einen entscheidenden Erfolg, daß seine Theorie für diese eine Temperatur die an N_2 und O_2 beobachteten Werte richtig wiedergibt, ohne zu bemerken, daß c_v im Bereich von einigen 100° praktisch konstant ist, von einer Proportionalität mit T also nicht die Rede sein kann. Hätte Herr Schweikert andere als zweiatomige Gase oder auch andere Temperaturen als gerade 18°C zum Vergleich herangezogen, so würde er ein vollständiges Versagen seiner Formel konstatiert haben. Zu dem Wert $c_p/c_v = 1,42$ bemerkt Herr Schweikert ausdrücklich, daß dieser „von der Anzahl der Atome im Molekül gänzlich unabhängig“ sei (S. 371). Bei dem Versuch, die Abweichungen der Edelgase von diesem Wert zu erklären, fügt er hinzu, daß ihm „ein solch hoher Wert

wie 1,66, der von der bisherigen Theorie gefordert wird, unwahrscheinlich erscheint“ (S. 372). Herr Schweikert scheint übersehen zu haben, daß das Experiment bei *allen* einatomigen Gasen ausnahmslos den theoretisch geforderten Wert 1,66 auf 2% genau bestätigt. Ferner ist doch gerade bei c_p/c_v die Abhängigkeit von der Anzahl der Atome im Molekül rein experimentell ganz offenbar.

Es dürfte sich nach dem vorstehenden erübrigen, auf diejenigen Komplikationen einzugehen, welche nach Schweikert bei den realen Gasen (im Zustand größerer Verdichtung) in der Formel für die spezifische Wärme auftreten sollen.

Im ersten Paragraphen der Arbeit versucht Herr Schweikert die Ableitung einer Zustandsgleichung für reale Gase, indem er neben der üblichen Vorstellung einer bestimmten endlichen Ausdehnung der Moleküle die neue Annahme einführt, daß die Moleküle zwar bis zum Moment des Stoßes keinerlei Kräfte aufeinander ausüben, daß sie jedoch bei einem Zusammenstoß eine endliche Zeit τ_0 im Zustand der Berührung verharren. Von einer Kritik dieser befremdlichen Vorstellung möchte ich absehen, da eine experimentell prüfbare Zustandsgleichung von Herrn Schweikert überhaupt nicht angegeben wird. Unter Zustandsgleichung pflegt man in diesem Zusammenhang eine funktionelle Verknüpfung zwischen den *beobachtbaren* Größen p , V , T zu verstehen. Die in der Arbeit angegebenen Gleichungen enthalten aber noch explicit die Molekulargeschwindigkeit a , ohne daß über deren Abhängigkeit von den Größen p , V , T eindeutige Aussagen gemacht werden. Daher ist auch ein Vergleich mit der Erfahrung vorerst nicht möglich. (Die auf S. 368 eingeführte Größe R ist nach Angabe von Herrn Schweikert eine empirische Größe, welche nur im Grenzfall mit der üblichen Gaskonstanten identisch ist.) Die Behauptung des Herrn Schweikert, daß nach den von ihm durchgeführten Untersuchungen „die Gesetzmäßigkeiten der Pulverumsetzungen deutlich und einwandfrei für die von ihm abgeleitete Form der Zustandsgleichung sprechen“, ist außerdem deshalb irreführend, weil diese Messungen wegen der Kompliziertheit der chemischen und physikalischen Vorgänge sowie wegen der beschränkten Meßgenauigkeit völlig ungeeignet zu einer derartigen Prüfung sind.

Angesichts dieser Unzulänglichkeiten der Theorie von Herrn Schweikert ist die Behauptung, daß sie „den wirklichen Verhältnissen mit großer Genauigkeit gerecht wird“, völlig unverständlich. Auch die angekündigte zweite Arbeit wird daran kaum etwas ändern können, wenn sie nicht den größten Teil der vorliegenden Arbeit widerrufen sollte.

Erwiderungen auf die Bemerkungen von R. Becker zu meiner Arbeit „Zur Theorie der Zustandsgleichung I“.

Von G. Schweikert in Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen am 11. November 1934.)

Becker sieht sich wiederum, wie bereits vor kurzem in der „Zeitschrift für das gesamte Schieß- und Sprengstoffwesen“, Heft 6, 1934 veranlaßt, meine neue Theorie der Zustandsgleichung und insbesondere die Theorie der spezifischen Wärmen anzugreifen und mit überlegener Geste abzutun. Er hat zwar nach Kenntnisaufnahme meiner ersten Erwiderung seine Kritik erheblich abgeändert, jedoch die Behauptung, daß meine „Theorie sich größtenteils nur durch eine Reihe von groben und elementaren Fehlern von der bisher gültigen unterscheidet“ unverändert gelassen. Ich werde daher im folgenden ausführlicher zeigen, daß die Kritik Beckers in keiner Weise den wirklichen, durch meine Theorie geschaffenen Tatsachen gerecht wird und nicht einen einzigen Fehler nachweist, sondern ihrerseits auf grundlegenden Irrtümern und Mißverständnissen beruht.

Für Becker ist offenkundig die bisher gültige Theorie des Äquipartitionsprinzips etwas Vollkommenes und Sicheres, durch die die wirklichen Zustände und Vorgänge genau beschrieben werden. Er scheint aber noch nie bemerkt zu haben, daß zwischen dieser Theorie und den experimentellen Tatsachen grundlegende und außerordentlich große Unterschiede bestehen, und daß die Theorie in sich große Schwierigkeiten aufweist.

Becker hat zunächst ganz richtig bemerkt, wie es ja auch in meiner Theorie ganz klar und offenkundig dargelegt ist, daß der wesentliche Unterschied zwischen meiner Theorie und der bisher gültigen und in allen Lehrbüchern zu findenden gaskinetischen Theorie darin besteht, daß nach meiner Theorie an Stelle des mittleren Komponentenquadrats (\bar{a}^2) das Quadrat (\bar{a}^2) der mittleren Geschwindigkeitskomponente der Moleküle tritt. Dieses beruht aber nicht auf irgendwelchen willkürlichen und fehlerhaften Annahmen, wie es nach den Darlegungen Beckers scheinen muß, sondern folgt streng und allgemein aus meiner neuen Theorie der Zustandsgleichung. Daß diese neue Theorie zu einem anderen Ergebnis, wie die bisher in den Lehrbüchern zu findende Theorie, die in ihren Grundlagen auf Clausius zurückgeht, führt, ist von mir streng begründet worden.

Becker behauptet nun im besonderen, daß der Fehler in meiner Druckberechnung gemäß der Gleichung: „ $p \approx \sum m \cdot a_n = m \cdot N \cdot \bar{a}$ “ auf S. 362“ meiner Arbeit, in der „die Summe über alle in einer Sekunde auf-

treffende Moleküle auszuführen“ ist, darin bestehe, daß die so eingeführte Größe \bar{a} sich auf den Mittelwert aller *auftreffenden* Moleküle bezieht, während das Maxwellsche Verteilungsgesetz den Mittelwert über die im ganzen *vorhandenen* Moleküle liefere. Diese beiden Mittel seien nicht gleichwertig, „weil schnellere Moleküle im Durchschnitt häufiger auf die Wand treffen als langsamere“. Becker scheint nicht bemerkt zu haben, daß er durch diese Argumentation bereits die bisher gültige Theorie, daß der Druck proportional dem mittleren Komponentenquadrat sei, die er doch verteidigen will, aufgegeben und sich meiner Theorie, daß der Druck proportional dem Quadrat der mittleren Komponente sei, angeschlossen hat, denn seine Ausführungen besagen lediglich noch, daß die Geschwindigkeitsverteilung der gegen die Wandung stoßenden Moleküle eine andere als die dem Maxwellschen Gesetz entsprechende sei, das hingegen auch nach Ansicht Beckers für die im Volumen vorhandenen Moleküle Gültigkeit besitzen soll. Wenn dieses richtig wäre, so würde daraus nur folgen, daß der Faktor $2/3\pi$ in der Zustandsgleichung, der sich nach meiner Theorie aus dem Maxwellschen Verteilungsgesetz ergibt, durch einen anderen, von Becker unbestimmt gelassenen Zahlenfaktor ersetzt werden müßte. Ich habe bereits auf S. 372 meiner Arbeit darauf hingewiesen, daß eine Abweichung der wirklichen Verteilung der Molekulargeschwindigkeiten von dem Maxwellschen Gesetz eine Änderung des Zahlenfaktors in der Zustandsgleichung und damit eine Abweichung des Wertes c_p/c_v von dem von mir berechneten Wert 1,424 zur Folge haben würde. Daß nach der von Becker gegebenen Argumentation dieser Faktor aber entsprechend der bisherigen Theorie den Wert $1/3$ annehmen müßte, weil der Druck proportional dem mittleren Komponentenquadrat sei, ist in keiner Weise einzusehen. Diese in den Lehrbüchern zu findende Theorie, auf die Becker Bezug nimmt, beweist in dieser Hinsicht nichts. Diese Theorien folgen den zuerst von Clausius gegebenen Ableitungen, die noch vor Aufstellung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes entwickelt worden sind. Demgemäß beweisen diese Theorien auf umständlichem und verwickeltem Wege zunächst nur, daß für den Spezialfall, daß alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit haben, im gleichmäßig ungeordneten Bewegungszustand das mittlere *Komponentenquadrat* gleich $1/3$ des Quadrats der Geschwindigkeit ist. Dieses ist aber eine einfache Tatsache, die sich viel allgemeiner und ganz streng in drei Zeilen beweisen läßt, wie ich auf S. 364 unten gezeigt habe. Wenn dann aber weiterhin das so gewonnene Resultat dadurch verallgemeinert wird, daß über beliebige, als vorhanden angenommene Geschwindigkeiten summiert und so das Quadrat der Geschwindigkeit

durch das mittlere Geschwindigkeitsquadrat ersetzt wird, so ist dieses doch nur dann zulässig, wenn das Gas aus einem Gemisch einer endlichen, wenn auch sehr großen Anzahl von Komponenten besteht, die je für sich die gleichen diskreten Geschwindigkeiten haben, und wenn vor allem die Moleküle dieser verschiedenen Bestandteile sich völlig unabhängig voneinander bewegen, während es doch gerade zum Wesen des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes gehört, daß die Moleküle eines beliebigen Gasvolumens, sofern es nur hinlänglich viel Moleküle enthält, ohne äußere Einwirkungen infolge der Stoßgesetze eine Geschwindigkeitsverteilung entsprechend dem Maxwell'schen Gesetz annehmen. Durch meine Theorie ist — meines Wissens zum erstenmal — eine gaskinetische ganz allgemeine Ableitung der Zustandsgleichung gegeben worden, die unabhängig von jeder besonderen Annahme über die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle ist und nur eine gleichmäßig ungeordnete Bewegung und Verteilung der Moleküle im Volumen voraussetzt.

In bezug auf die von Becker zitierte Gleichung: $p \approx \sum m a_n$ ist zu sagen, daß die kurzen Darlegungen auf S. 362 kein strenger Beweis dafür sein sollten, daß an die Stelle des mittleren Komponentenquadrats das Quadrat der mittleren Komponente treten müsse, sie sollten vielmehr nur kurz und übersichtlich den Sachverhalt erläutern. Ich habe einige Zeilen über diesen Ausführungen auf derselben S. 362 zu Beginn des § 2 meiner Theorie ausdrücklich gesagt: „Wie aus der vorstehenden Ableitung der Zustandsgleichung klar und eindeutig hervorgeht, ist die quadratische Größe a^2 auf der rechten Seite der Gleichung das Quadrat der mittleren Geschwindigkeitskomponente a der Moleküle“ usw. In der strengen und allgemeinen Theorie des § 1 meiner Arbeit ist aber der Druck p durch die Gleichung dargestellt

worden: $p = 2 \frac{m}{o} \cdot \frac{a}{\tau}$, worin entsprechend den dort gegebenen ausführlichen

Entwicklungen die Größe a zunächst die mittlere Komponente der in einer Elementarschicht längs der Fläche der Wand vorhandenen Moleküle und τ das mittlere Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Molekülstößen gegen diese Fläche ist. Die oben wiedergegebene Argumentation Beckers würde also behaupten, daß die in der Nähe der Wand vorhandenen Moleküle im Durchschnitt eine andere Geschwindigkeitsverteilung besitzen wie die übrigen Moleküle des Volumens, und zwar müßten insbesondere die Moleküle um so häufiger vorkommen, je größer ihre Geschwindigkeit ist. Ob Becker dieses wirklich behaupten will, bezweifle ich sehr. Es würde doch daraus u. a. auch folgen, daß so etwas wie eine Entmischung des Gases an der ruhenden Wand vor sich ginge und daß

die Temperatur des Gases unmittelbar an der Wandung wesentlich höher als in dem übrigen Volumen wäre!

Becker sieht sich zwar genötigt, die gute Übereinstimmung der aus meiner Theorie folgenden Werte für die Molekularwärme und das Verhältnis der spezifischen Wärmen der Gase N_2 , O_2 und H_2 mit den experimentellen Werten anzuerkennen. Daß aber meine Theorie bei den anderen, nicht zweiatomigen Gasen und bei höheren Temperaturen vollständig versage, wie Becker behauptet, ist von ihm in keiner Weise bewiesen und widerspricht dem wahren Tatbestand. Eine prinzipielle Schwierigkeit bieten nur, wie auch klar in meiner Arbeit zum Ausdruck gebracht wurde, die spezifischen Wärmen der einatomigen Gase. Mehr möchte ich vorläufig über diesen Punkt nicht sagen.

Becker beanstandet im besonderen, daß ich in meiner Gleichung für die spezifische Wärme (c_v) bei konstantem Volumen der zweiatomigen Gase zur Berechnung des c_v -Wertes bei $18^\circ C$ für den thermischen Spannungskoeffizienten α_p den Wert $1 : T_0 = 1/273$ eingesetzt habe, während er in Wirklichkeit den Wert $1 : T$ hat. Es ist richtig, daß diese Substitution der Bedeutung der von mir abgeleiteten Gleichung nicht streng entspricht. Jedoch ist die hierdurch bedingte Änderung des berechneten c_v -Wertes bei $18^\circ C$ sehr gering (etwa 6%), und dieser Umstand ist ohne jede Bedeutung für die Zuverlässigkeit und den Wert meiner Theorie. Zudem habe ich zwischen den beiden Ausdrücken der in Betracht kommenden Gleichung (27), die einerseits α_p und andererseits $1/T_0$ enthalten, nur das Zeichen „ \sim “, nicht aber das „ $=$ “-Zeichen gesetzt. Eine Verallgemeinerung des so gewonnenen Ausdrucks auf beliebige Temperatur- und Druckbereiche, wie Becker es will, verbietet sich schon deshalb, weil diese Gleichung durch die angenäherte, ausdrücklich als nur bei normalen Temperaturen und Drucken zulässig erklärte Substitution von $p v$ durch $R T$ gewonnen ist. Für das wirklich ideale Gas ist auch gemäß meiner Theorie der Wert für die Molekularwärme (c_v)₀ gemäß Gleichung (23) auf S. 368 konstant und von der Temperatur unabhängig. Die realen zweiatomigen Gase verhalten sich aber in dieser Beziehung durchaus nicht wie ein ideales Gas. Genau wie die Abweichungen der c_v -Werte bei den anderen mehratomigen Gasen lassen sich auch hier diese Abweichungen gemäß der allgemeinen Gleichung (26) auf S. 369 dadurch erklären, daß der Wert von $\frac{1}{k} \left(\frac{d k}{d T} \right)_v$ neben dem kleinen Wert α_p für eine genauere Rechnung nicht zu vernachlässigen ist.

Becker behauptet dann, daß „doch gerade bei c_p/c_v die Abhängigkeit von der Anzahl der Atome im Molekül rein experimentell ganz offenbar“

sei. Er scheint also noch nie bemerkt zu haben, daß diese Abhängigkeit nur eine ganz rohe und nur für einige Gase gültig ist (die Werte für einatomige Gase schließe ich vorerst aus meinen Betrachtungen aus) und in keiner Weise mit dem Äquipartitionsprinzip übereinstimmt, während viele mehratomige Gase überhaupt vollkommen aus der Gesetzmäßigkeit nach der Anzahl der Atome im Molekül herausfallen. So hat z. B. das zweiatomige Gas Cl_2 einen Wert: 1,32 bis 1,35 und ClJ sogar einen Wert von 1,31; das sind aber Werte, wie sie nach der bisherigen Theorie höchstens für dreiatomige Gase angenähert gelten könnten. Die dreiatomigen Gase CO_2 mit $c_p/c_v = 1,30$; N_2O mit 1,28 und SO_2 mit 1,26 liegen durchweg sehr erheblich unter dem theoretisch geforderten Wert von 1,33. Andererseits haben sehr viel höheratomige Gase wie NH_3 mit 1,30 oder CH_4 mit 1,30 und C_2H_4 mit 1,26 Werte des Verhältnisses der spezifischen Wärmen, die teils größer als die Werte der dreiatomigen Gase sind und sehr stark über den theoretisch geforderten Werten liegen. Wenn aber in ganz groben Zügen so etwas wie ein Gang mit der Anzahl der Atome im Molekül vorhanden ist, so hat das nicht in einem Äquipartitions-gesetz seine Ursache, sondern darin, daß mit zunehmender Atomzahl im Molekül *meistens* der Molekülradius (ρ) und die Stoßdauer (τ_0) und damit die Abweichungen vom idealen Gasgesetz anwachsen. Daher müssen auch diejenigen mehratomigen Gase, die das sehr kleine Wasserstoffatom insbesondere in größerer Anzahl enthalten, besonders stark aus diesem Gang herausfallen, wie es auch wirklich ganz deutlich zutrifft. Ich verweise Becker noch besonders auf eine ausführliche Zusammenstellung der c_p/c_v -Werte in meiner Inaugural-Dissertation, S. 85, Leipzig 1915¹⁾. Dort sind insbesondere auch die Werte für Luft zusammengestellt, die im Laufe der Zeit u. a. von den größten Experimentatoren und Physikern nach den bekannten sechs verschiedenen Methoden durchgeführt sind. Diese Werte schwanken zwischen 1,427 und 1,302 (Kohlrausch). Wenn gegenüber diesem Sachverhalt Becker sagt, daß das „Experiment bei *allen einatomigen* Gasen ausnahmslos den theoretisch geforderten Wert 1,66 auf 2% genau bestätigt“, so erlaube ich mir hinter die Zuverlässigkeit dieser gerade für die einatomigen Gase sehr schwierigen Bestimmungen ein Fragezeichen zu setzen. (Für Quecksilberdampf haben ja Kundt und Warburg sogar den genauen Wert 1,666 (drei Dezimalen) bei 275 bis 356° C bestimmt!). Demgegenüber ist es auffallend, daß für Luft gerade die ältesten c_p/c_v -Bestimmungen, die noch nicht mit der Theorie des Äquipartitionsprinzips belastet waren, folgende Werte geben:

¹⁾ Vgl. Ann. d. Phys. (4) 48, 646, 1915.

1,425 Poisson, 1,421 Dulong; 1,425 Dreser; 1,420 Masson, 1,427 und 1,421 Assmann, die sehr genau mit dem von meiner Theorie für das ideale Gas geforderten Werte 1,424 übereinstimmen.

Zu den übrigen Ausführungen Beckers zum § 1 meiner Theorie ist folgendes zu sagen:

Die Größe R ist auf S. 368 von mir als *empirische* Konstante eingeführt worden, die zunächst nach der Erfahrung nur in dem Intervall von 0 bis 100° C bei normalem Druck sehr genau konstant ist. Welche Werte R in anderen Temperatur- und Druckbereichen bei den realen Gasen besitzt, darüber kann meine Theorie deshalb ohne weiteres nichts aussagen, weil dieses wesentlich und ausschließlich von der den experimentellen Messungen zugrunde liegenden Temperaturmessung und — definition abhängt. Ich habe es daher absichtlich stets vermieden, bei der *allgemeinen Form* der Zustandsgleichung (18) den Temperaturbegriff einzuführen, diese Gleichung enthält ausschließlich den unzweideutigen und klaren Begriff der Geschwindigkeit der Moleküle¹⁾; daß meine Gleichung aber deshalb überhaupt nicht prüfbar sei, ist eine Verstellung des wahren Sachverhalts.

Daß endlich die Gesetzmäßigkeiten der Pulverumsetzung nach der Behauptung Beckers „völlig ungeeignet“ zu einer Prüfung meiner Theorie seien, trifft gleichfalls nicht zu. Sowohl die Meßgenauigkeit, wie auch die Kenntnisse der physikalischen und chemischen Vorgänge reichen hierbei vollkommen aus, um zu einem sicheren Urteil zu kommen.

Die Explosionsvorgänge der Pulver sind sogar *besonders* zu einer Prüfung der Zustandsgleichung geeignet nicht allein, weil auf anderem Wege so hohe Temperaturen und Drucke nur sehr schwierig oder überhaupt nicht herzustellen sind, sondern besonders auch deswegen, weil es im Wesen des Explosionsvorganges liegt, daß während dieses Vorganges bei einem gegebenen Pulver in der Versuchsbombe die Molekulargeschwindigkeit der Gase in weitem Bereich unabhängig von der Ladedichte sehr genau konstant bleibt. Die Berechnung oder Bestimmung des Wertes der Temperatur der Gase ist daher hier für eine Prüfung der Zustandsgleichung hinsichtlich der Abhängigkeit von Druck und Volumen zunächst völlig nebensächlich.

Durch vorstehende ausführliche Darlegungen ist eingehend bewiesen, daß die Kritik Beckers völlig verfehlt ist und nicht einen einzigen Fehler in meiner Theorie nachgewiesen hat.

¹⁾ Über den Temperaturbegriff habe ich mich im übrigen bereits in der früheren Veröffentlichung in der eingangs genannten Zeitschrift für das gesamte Schieß- und Sprengstoffwesen, Heft 6, ausführlich mit Herrn Beckers Ansichten auseinandergesetzt.

Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung.

Von **R. Becker** in Berlin.

(Eingegangen am 19. November 1934.)

Zu der vorstehenden Erwiderung möchte ich zunächst bemerken, daß ich meine Kritik an der Arbeit von G. Schweikert in vollem Umfang aufrechterhalte. Hinsichtlich des Auftretens von \bar{a}^2 in der Zustandsgleichung verweise ich nochmals auf die Lehr- und Handbuchliteratur, da ich den Lesern dieser Zeitschrift eine weitere Erörterung über diesen elementaren und an vielen Stellen ausführlich behandelten Gegenstand nicht zumuten möchte.

Zu den von Schweikert herangezogenen Zahlenwerten von c_p/c_v für Cl_2 , N_2O und andere Moleküle ist allgemein zu sagen, daß man in jedem Falle prüfen muß, ob bei der gewählten Meßtemperatur bereits innere Atomschwingungen angeregt sind. In einem solchen Falle muß natürlich eine für das *starre* Molekül abgeleitete Formel versagen.

Bei Luft bestätigen (laut Landolt-Börnstein) alle neueren Messungen übereinstimmend den Wert 1,40 für c_p/c_v . Diese Tatsache führt Schweikert darauf zurück, daß die betreffenden Experimentatoren „mit der Theorie des Äquipartitionsprinzips belastet waren“.

Berlin, 18. November 1934.

Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung.

Von **G. Schweikert** in Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen am 22. November 1934.)

Zu der vorstehenden Bemerkung möchte ich nur kurz darauf hinweisen, daß die ad hoc gemachte Hypothese der „Anregung innerer Atomschwingungen“ natürlich nichts beweist. Zudem kann sie nicht *zugleich* die zu kleinen c_p/c_v -Werte für zwei- und dreiatomige Moleküle und die viel zu großen Werte für fünf- und sechsatomige Moleküle gegenüber den vom Äquipartitionsprinzip geforderten Werten erklären. Der letzte Satz Beckers enthält eine Verdrehung und Ausdeutung meiner Ausdrucksweise auf S. 687 (unten) meiner „Erwiderungen“, wo nur ein Sachverhalt ausgedrückt ist.

Da andere sachliche Ausführungen fehlen, habe ich auf die Bemerkungen Beckers nichts mehr zu erwidern.

Bemerkung zu einer Arbeit von F. Jentzsch und H. Steps: „Die Winkelabhängigkeit des Brechungsindex bei Röntgenstrahlen“.

Von J. A. Prins in Groningen.

(Eingegangen am 7. November 1934.)

In dieser Arbeit¹⁾ scheint mir folgende historische Betrachtung (S. 154) unrichtig zu sein:

„Von R. Foster²⁾ wurde zuerst, später nochmals von J. A. Prins³⁾ darauf aufmerksam gemacht, daß das Vernachlässigen der Absorption nicht richtig ist, sondern die Absorption berücksichtigt, also die Formeln der Metalloptik angewandt werden müssen. Leider sind seine Rechnungen nicht einwandfrei. . . . Von F. Jentzsch⁴⁾ wurde die erste richtige Reflexionsformel aufgestellt“.

Jeder der drei obigen Sätze scheint mir ein irriges Urteil zu enthalten:

1. Soviel ich weiß, ist die erste Publikation über diesen Gegenstand (in der sowohl die theoretische Herleitung der Reflexionsformel wie eine erste experimentelle Bestätigung vorkommt) von meiner Hand erschienen in *Nature*⁵⁾, August 1927, also zwei Monate vor dem *Eingang* der Foster'schen Arbeiten [Oktober 1927 in *Naturwissensch.*⁶⁾, November 1927 an *Helv. Phys. Acta*⁷⁾]. Foster hätte also meine Arbeit erwähnen können, aber sie scheint ihm entgangen zu sein. Merkwürdiger ist es jedoch, daß nach so vielen Jahren, während welcher die erwähnte Arbeit öfters zitiert wurde, die Umstellung sich noch bei Jentzsch und anderen Autoren, z. B. Thibaud⁸⁾ und Siegbahn (oben zitiert) findet.

2. Obwohl der zweite Satz des obigen Zitats wahrscheinlich auf Foster zielt, geht daraus doch in Verbindung mit dem dritten Satz hervor, daß auch meine Berechnungen als nicht einwandfrei betrachtet werden. Ich

¹⁾ F. Jentzsch u. H. Steps, *ZS. f. Phys.* **91**, 151, 1934. — ²⁾ R. Foster, *Helv. Phys. Acta* **1**, 20–46, 1927. — ³⁾ J. A. Prins, *ZS. f. Phys.* **47**, 479–498, 1928. — ⁴⁾ F. Jentzsch, *Phys. ZS.* **30**, 268–273, 1929; vgl. auch M. Siegbahn, *Spektroskopie d. Röntgenstrahlen*, 2. Aufl., S. 34 bis 36. — ⁵⁾ J. A. Prins, *Nature* **120**, 188, 1927. — ⁶⁾ R. Foster, *Naturwissensch.* **15**, 969, 1927. — ⁷⁾ Oben zitiert. — ⁸⁾ J. Thibaud, *Journ. de phys. et le Radium* **1**, 37, 1930.

möchte demgegenüber behaupten, daß das von mir (und von Foster) gemachte Einsetzen des (konstanten) komplexen Brechungsindex in die Fresnelschen Formeln in aller Strenge erlaubt ist. Um dies zu zeigen, übernimmt man die übliche elektromagnetische Herleitung der Fresnelschen Formeln, wobei jedoch (gemäß dem komplexen Werte von D/E) die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ im absorbierenden Medium komplex wird. Hierbei verlieren auch die „Richtungskosinusse“ in diesem Medium ihre direkte Bedeutung. Dies alles beeinträchtigt jedoch keineswegs die formale Darstellung der Wellen und im besonderen bleibt die Herleitung der Reflexionsformel einwandfrei.

3. Die von F. Jentzsch gegebene Formel (oben zitiert) unterscheidet sich demgemäß allein in der Schreibweise von der meinigen (oder Foster-schen).

Berichtigung zu der Arbeit: „Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons“¹⁾.

Von **W. Heisenberg** in Leipzig.

(Eingegangen am 5. November 1934.)

Die Herren Euler und Kockel haben mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß in den Gleichungen (59), (60) und (61) der oben genannten Arbeit ein Rechenfehler unterlaufen ist. Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen muß noch, wie in Gleichung (56) angegeben ist, die Summation über die Spinindizes vorgenommen werden, was bei den Gliedern, die S_0 nicht enthalten, einfach eine Multiplikation mit dem Faktor 4 bedeutet. Ferner hat mich Herr Weisskopf darauf hingewiesen, daß die Schreibweise der Formel (68) irreführend ist. Man müßte sie vielleicht konsequenter

$$\sum_{\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{g}} \{ |(-; M_{g,e} | s_1 | \mathbf{p}', \mathbf{p}''; M_{g,e} - 1)|^2 - |(-; M_{g,e} | s_1 | \mathbf{p}', \mathbf{p}''; M_{g,e} + 1)|^2 \}$$

schreiben. Herr Teller zeigte mir, daß auf S. 215, Zeile 9 das Wort „quadratisch“ durch „linear“ zu ersetzen ist. Schließlich bemerkte Herr Payne, daß die Bezeichnungen nicht genau denen der Diracschen Arbeit angepaßt und daß dadurch Fehler entstanden sind. In den rechten Seiten der Gleichungen (1), (12), (45) und den entsprechenden Ausdrücken in anderen Gleichungen, ferner in den $\alpha_{k,k'}^{\lambda}$ der Gleichungen (16) bis (21), (56), (58) sind die gestrichenen Größen mit den ungestrichenen zu vertauschen; im Ausdruck für s_{λ} [Gleichung (16)] und den Ausdrücken $V_n \Delta_n N'_n, N'_n \Delta_n V_n$ in Gleichung (53) muß das Vorzeichen geändert werden. Für diese Korrekturen möchte ich ihren Urhebern danken.

Die in der Arbeit abgeleiteten Resultate werden durch diese Verbesserungen nicht verändert.

¹⁾ ZS. f. Phys. **90**, 209, 1934.